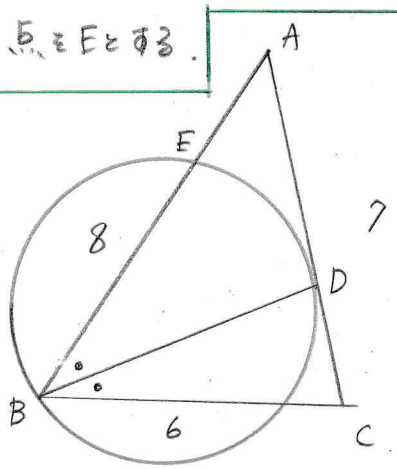
7月 進研模試 過去問 1年 2020年

6 図形の性質(25点)

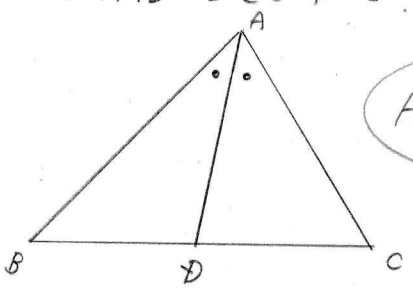
右図のように、AB=8, BC=6, CA=7 の△ABCがあり、∠ABCの二等分線と辺ACの交点をDとする。また点Bを通り点Dで辺ACと接する円と、辺ABとの交点のうち、Bと異なる点をEとする。



(1) AD:DCを最も簡単な整数比で表せ。また、線分ADの長さを求めよ。

<考え方>「内角の二等分線の性質」を利用して、AD:DCを求める

AB:AC=BD:DC



BA:BC=AD:DC=8:6=4:3

AD:DC=4:3より

AC:AD=7:4

7AD=4AC

$AD=\frac{4}{7}AC$

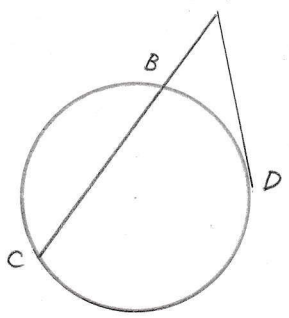
AC=7より

AD=4

∴ AD:DC=4:3
AD=4

(2) 線分AEの長さを求めよ

<考え方>「方べきの定理」(接点ver)を用いる。



$AB\cdot AC=AD^2$

AE=xとおく

$AE\cdot AB=AD^2$

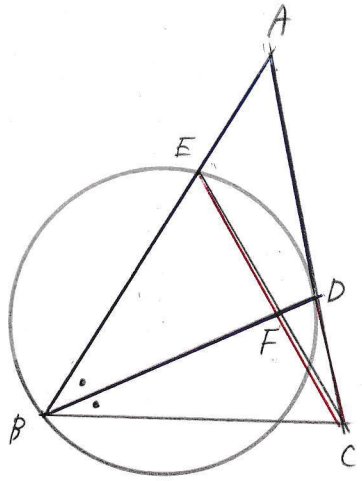
$x\cdot 8=4^2$

$8x=16$

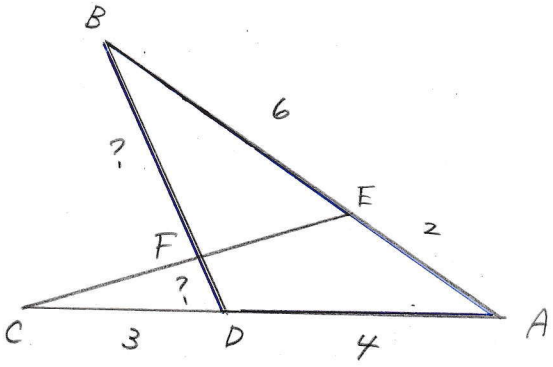
$x=2$

∴ AE=2

(3) 線分BDとCEの交点をFとするとき、BF:FDを最も簡単な整数比で表せ。また、△ABCの面積をSとするとき、四角形AEFDの面積をSを用いて表せ。



<考え方> 1本の直線の内分比を聞かれたとき、たいがい「メネラウスの定理」を疑うとよい。今回であれば BF:FDを聞かれているので それを含む三角形を探していくと… △BADが適当だ。



△BADにメネラウスの定理を適用して

$$\frac{AC}{CD}\cdot\frac{DF}{FB}\cdot\frac{BE}{EA}=1$$

であるから、それぞれ数値を代入して

$$\frac{7}{\cancel{3}_{1}}\cdot\frac{DF}{FB}\cdot\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}_{1}}=1$$

$$7\cdot\frac{DF}{FB}=1$$

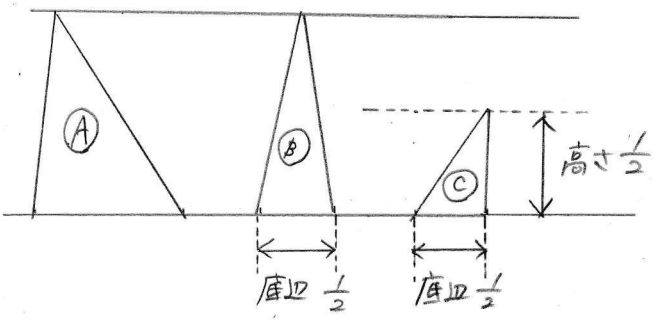
$$\frac{DF}{FB}=\frac{1}{7}$$

∴ BF:FD = 7:1

また、四角AEFDを求めていく

△ABCをSとして、Sを使って求める

これは、辺の比を使って、何回かに分けて計算していけばカンタンだ



たとえばⒶの面積をSとしよう

底辺が$\frac{1}{2}$、高さが同じⒷは$\frac{1}{2}S$だ

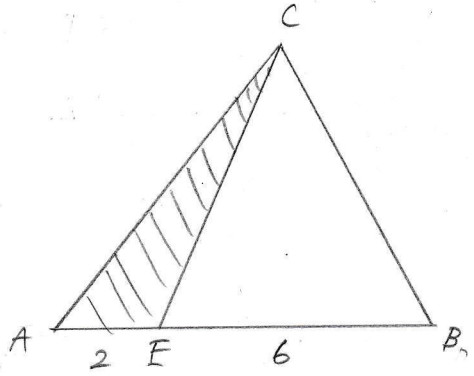
底辺が$\frac{1}{2}$、高さも$\frac{1}{2}$のⒸは$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}S$となる

このような感じで四角AEFDの面積を出す

四角形AEFDの面積は、

△CAEの面積を出して、そこから△CDFの面積を引けば出すことができる！

では、△CAEの面積を出そう



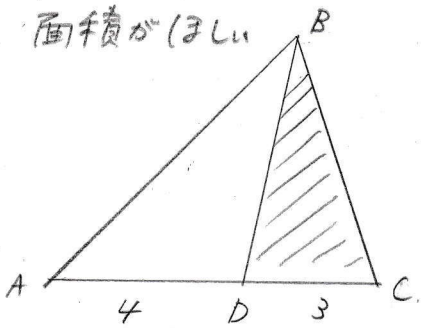
∠Cを頂角として△ABCを見てみると、△ABCは△CAEと△CBEに分けられる！

そしてこれらの三角形は高さが同じで底辺が2:6→1:3だ！

つまり面積比も1:3、したがって△CAEは△ABC(S)の1:(1+3)=1:4となる！

∴ △CAE = $\frac{1}{4}S$ となる。—①

次に△CDFを求めよう。そのためには△CBDの面積がほしい

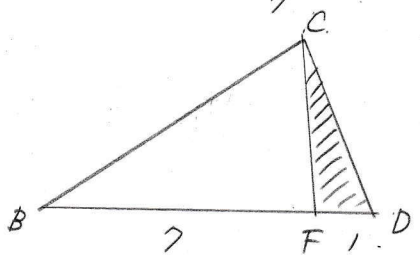


今度は∠Bを頂角として△ABCを見てみよう

すると△ABCが△BADと△BCDが見える

そしてこれらの三角形は高さが同じで底辺が4:3である！したがって△BCD:△ABC(S)=3:(3+4)=3:7

∴ $\triangle BCD = \frac{3}{7}S$ である。



最後に△CDFを求める。先程求めた△BCDを、∠Cを頂角としてとらえると、△BCDは△CBFと△CDFに分けられる。そして、これらの三角形は、高さが同じで、底辺が7:1である。よって、△CBF:△CDF=7:1となるから、△CDFと△BCD=1:(1+7)=1:8となる。

したがって、$8\triangle CDF = \triangle BCD$

$$\triangle CDF = \frac{1}{8}\triangle BCD$$

である。$\triangle BCD = \frac{3}{7}S$ であるから、

$$\triangle CDF = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7}S$$

$$= \frac{3}{56}S. \quad — ②$$

①、②より

四角形AEFD = △CAE − △CDF

$$= \frac{1}{4}S - \frac{3}{56}S$$

$$= \frac{14}{56}S - \frac{3}{56}S$$

$$= \frac{11}{56}S.$$

//