7月 進研模試 過去問 2年 2020年

B9. 2次関数(20点)

2次関数 $f(x)=x^2-2ax+2a$ がある。ただし、a は定数とする。

(1) $a=1$ のとき、$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標を求めよ。

$a=1$ だから、

$y=x^2-2x+2$

$=(x^2-2x)+2$

$=(x^2-2x+1-1)+2$

$=(x^2-2x+1)-1+2$

$=(x-1)^2+1$

頂点の座標 $(1,1)$

(2) $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。また、$f(x)$ の最小値が -1 となるような a の値を求めよ。

$f(x)$ を平方完成する。

$f(x)=x^2-2ax+2a$

$=(x^2-2ax)+2a$

$=(x^2-2ax+a^2-a^2)+2a$

$=(x-a)^2-a^2+2a$

下に凸のグラフかつ、x に定義域が定められていないから、頂点の y 座標が最小値。

$\therefore -a^2+2a$

また、その値が -1 であるから

$-a^2+2a=-1$

$a^2-2a-1=0$

$b'=-1$

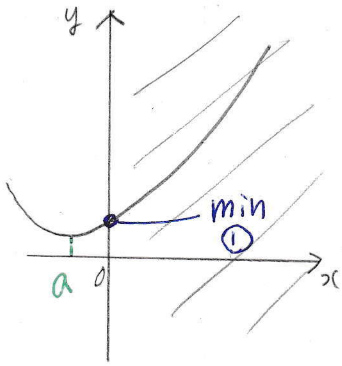
$a=1\pm\sqrt{1+1}$

$=1\pm\sqrt{2}$

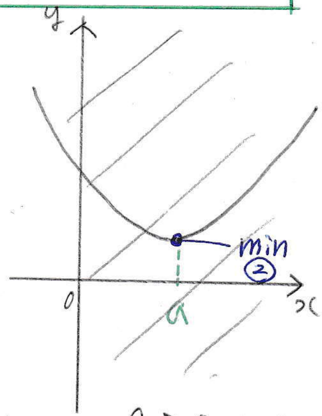
$\therefore$ $f(x)$ の最小値 $-a^2+2a$

$a=1\pm\sqrt{2}$

(3) $x\geqq 0$ における $f(x)$ の最小値を m とするとき、$m\geqq -1$ となるような a の値の範囲を求めよ。



$a<0$ のとき



$a\geqq 0$ のとき

〈考え方〉 $f(x)$ の最小値は、軸が a であるため軸の位置によって変化する。

① 軸が $x\geqq 0$ の外にいる ($a<0$ のとき)

② 軸が $x\geqq 0$ の中にいる ($a\geqq 0$ のとき)

の2パターンである

それぞれに分けて条件にあてはめて解いていく

① $a<0$ のとき $x=0$ のとき min ①

$m=f(0)=2a$

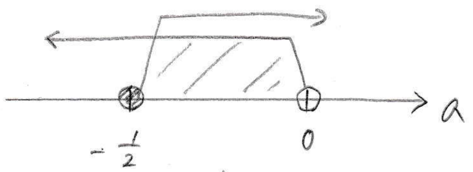
$\therefore m=2a$

$m\geqq -1$ であるから、$m=2a$ を代入し

$2a\geqq -1$

$a\geqq -\frac{1}{2}$

$a<0$ のときだから.



$-\frac{1}{2}\leqq a<0$ …①′

② $a\geqq 0$ のとき, 頂点が min ②

$m=f(a)=-a^2+2a$

$m=-a^2+2a$

同様に $m\geqq -1$

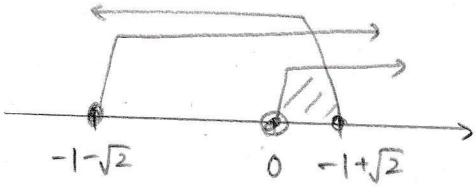
$-a^2+2a\geqq -1$

$a^2-2a-1\leqq 0$

< (1)より $a=1\pm\sqrt{2}$. >

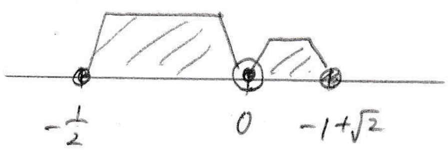
$-1-\sqrt{2}\leqq a\leqq -1+\sqrt{2}$.

$a\geqq 0$ のときだから



$0\leqq a\leqq -1+\sqrt{2}$ …②′

①′, ②′より



$-\frac{1}{2}\leqq a\leqq -1+\sqrt{2}$