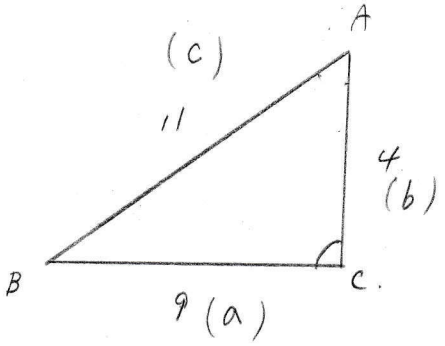
7月 進研模試 過去問 2019年 2年

B3 図形と計量.(20点)

△ABCがあり, AB=11, BC=9, CA=4である。

(1) cos∠ACBの値を求めよ.




余弦定理でよい.

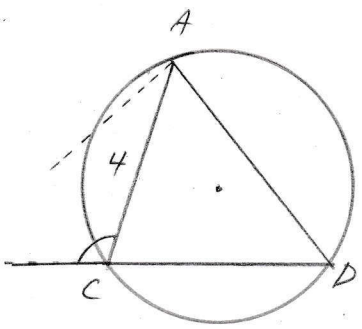
$$\cos\angle ACB = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}$$

$$= \frac{81+16-121}{2\cdot 9\cdot 4} = -\frac{\cancel{24}^{\cancel{12}\,\cancel{6}\,\cancel{3}}}{\cancel{2}_{1}\cdot\cancel{9}_{3}\cdot\cancel{4}_{1}}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

(2) 辺BCのCの側の延長線上にDを、△ACDの外接線の半径が$\frac{9\sqrt{2}}{4}$となるようにとる.

このとき線分ADの長さを求めよ。また,線分CDの長さを求めよ.




<考え方> 外接円の半径が出ているから, 正弦定理を使うのがセオリー.

ここでポイント!

cos∠ACBを(1)で出しているから, cos∠ACD=

cos(180−∠ACB)

$= -\cos\angle ACB$

これを使うことができる! ここからsin∠ACBに持ちこめば答えは5秒前だ!

$\cos\angle ACD = \cos(180-\angle ACB)$

$= -\cos\angle ACB$

(1)より $\cos\angle ACB = -\frac{1}{3}$ だから,

$\cos\angle ACD = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

$\therefore \sin\angle ACD = \pm\sqrt{1-\cos^2\angle ACD}$

$= \sqrt{1-\frac{1}{9}}$

$= \sqrt{\frac{8}{9}}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$のとき $\sin\theta$は正.

正弦定理より

$$2R = \frac{a}{\sin A}$$

$$2\cdot\frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{AD}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{AD}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$ 両辺に$\frac{2\sqrt{2}}{3}$をかけると

$$AD = \frac{\cancel{9}^{3}\sqrt{2}}{\cancel{2}_{1}}\cdot\frac{\cancel{2}^{1}\sqrt{2}}{\cancel{3}_{1}}$$

$$= 6$$

CDを求める. 2辺とcosの値が出ているから, 余弦定理を用いるとよい.

CD=xとおく.

$$\underbrace{AD^2}_{6} = \underbrace{AC^2}_{4} + \underbrace{CD^2}_{x} - 2\cdot\underbrace{AC}_{4}\cdot\underbrace{CD}_{x}\cdot\underbrace{\cos\angle ACD}_{\frac{1}{3}}$$

$36 = 16 + x^2 - \frac{8}{3}x$

$x^2 - \frac{8}{3}x - 20 = 0$

$3x^2 - 8x - 60 = 0$

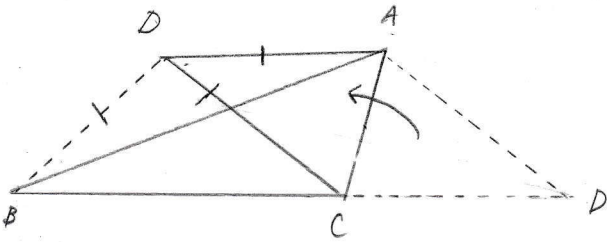
$$\begin{array}{ccc} 3 & 10 & 10 \\ 1 & -6 & -18 \\ \hline & & -8 \end{array}$$

$(3x+10)(x-6) = 0$

$x = -\frac{10}{3},\ 6$　　$x > 0$ より $x = 6$

$\therefore AD = 6,\ CD = 6$

(3) (2)のとき、辺ACを折り目として、△ACDを折り曲げ、BD=CDとなるようにする。このとき、四面体DABCの体積を求めよ。




〈考え方〉三角形を折り曲げたことにより、四面体ができあがったという。四面体というのは立体である。全て三角形でできた、四面の立体だ。これの体積を求めたい。

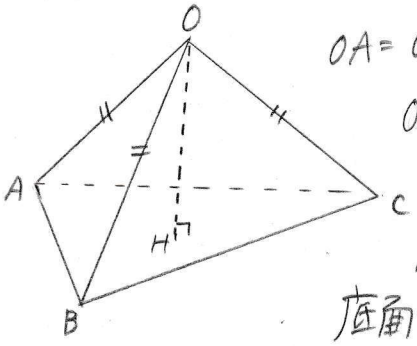
どこを底面として、どこを高さとするか、という問題だ。底面積はどこを底面にしても出せるから、問題は"高さ"だ。注目は、不自然に等しいBD=CD！また(2)からも明らかなように、ADも同じである。つまり

AD = BD = CD である！

これを利用すれば簡単だ。

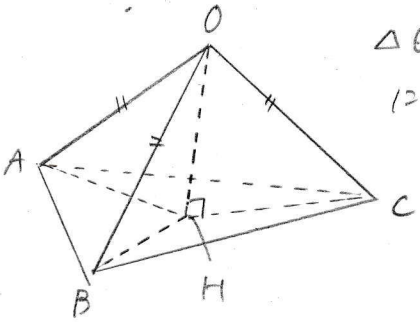
ここでこの鉄則を利用しよう！

下図のような四面体があったとしよう。




OA = OB = OCとなるとき、Oから底面に落とした垂線(=高さ)の脚"H"は、底面の外接円の中心と一致する！

これ、使えるだろ!? 知ってたか!? 証明してやろう。




△OAH, △OBH, △OCHに着目する。

OHは共通

OA = OB = OC

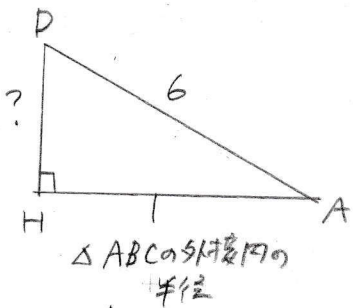
∠OHA = ∠OHB = ∠OHC = 90°

直角三角形の合同条件、斜辺と他の1辺相等より △OAH ≡ △OBH ≡ △OCH である

したがって、AH = BH = CH

このことから、Hは△ABCの外接円の中心と一致する

これはこれからバンバン使ってくれ！当然これは正四面体の時100%成り立っている。




では問題に戻ろう。

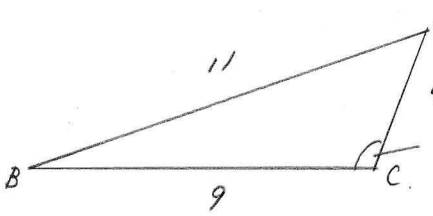
Dから底面△ABCに落とした垂線の脚をHとする。

↑これは△DHAを横から見たもの

DHが高さとなる。

AHを求める.

AHは△ABCの外接円の半径である




$\cos\angle ACB = -\frac{1}{3}$

正弦定理を用いれば求められる.

$\cos\angle ACB = -\frac{1}{3}$ より $\sin\angle ACB$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$2R = \frac{AB}{\sin\angle ACB}$$

$$= \frac{11}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{33}{2\sqrt{2}}$$

$$R = \frac{33}{4\sqrt{2}} = \frac{33\sqrt{2}}{8}$$

では DHを求めよう

$$DH = \sqrt{6^2 - \left(\frac{33\sqrt{2}}{8}\right)^2}$$

$$= \sqrt{36 - \frac{1089\cdot\cancel{2}^{1}}{\cancel{64}_{32}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1152-1089}{32}}$$

$$= \sqrt{\frac{63}{32}} = \frac{\sqrt{7\cdot 9}}{\sqrt{16\cdot 2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{14}}{8}$$

底面積を求めよう

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{\cancel{2}_{1}}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot 9\cdot\sin\angle ACB$$

$$= 2\cdot\cancel{9}^{3}\,\frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}_{1}}$$

$$= 12\sqrt{2}$$

体積を求めよう

$$\cancel{12}^{3}\sqrt{2}\times\frac{\cancel{3}^{1}\sqrt{14}}{\cancel{8}_{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{3}_{1}}$$

$$= \frac{3\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{7}}{\cancel{2}}$$

$$= 3\sqrt{7}$$