ベネッセ駿台 マーク模試 第1回（9月）

2020年 第2問（微分法・積分法）

[1] aを実数とし、

$$f(x)=x^3+(a-4)x-2a$$

とする。

$$f'(x)=\boxed{(ア)}\,x^2+a-\boxed{(イ)}$$

である。

以下、曲線 $y=f(x)$ を C とする。

〈解答〉

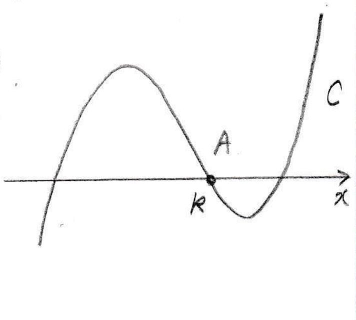
$f(x)=x^3+(a-4)x-2a$ を微分しよう。

$$f'(x)=3x^2+(a-4)\cdot 1$$

$$=3x^2+a-4$$

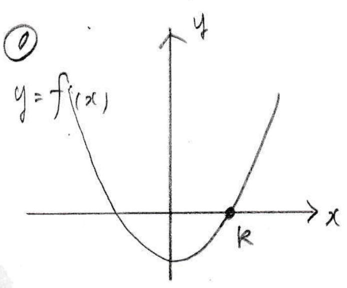
∴ (ア)…3 (イ)…4

(1) aの値に関わらず、Cはx軸上の点A（$\boxed{(ウ)}$, 0）を通る。点Aの近くで、Cが右図のようになったとき $y=f'(x)$ のグラフの概形として最も適当なものを、次の⓪～③から選べ。

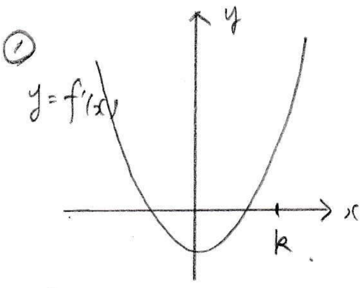


ただし、$k=\boxed{(ウ)}$ とする。 $\boxed{(エ)}$

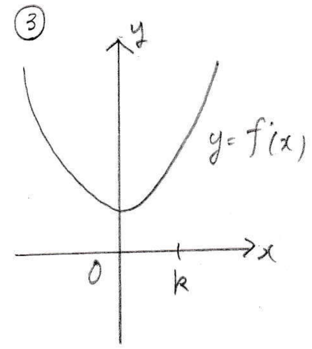
⓪



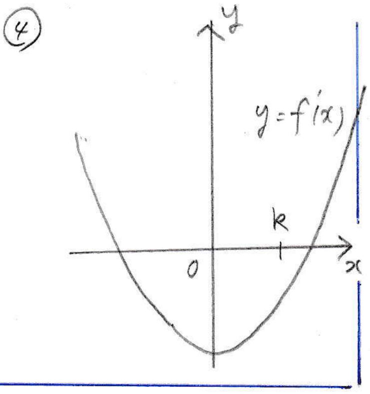
①



③



④



〈解答〉 x軸上の点（(ウ)，0）を通ると言っているから、まず、Cに $y=0$ を代入する

∴ $x^3+(a-4)x-2a=0$

因数分解ができそうだ。

$x=2$を代入してみると、左辺が0になる

組み立て除法より

2	1	0	$a-4$	$-2a$
		2	4	$2a$
	1	2	a	0

$(x-2)(x^2+2x+a)=0$

∴ $x-2=0$、または $x^2+2x+a=0$

→ $x=2$ または $x^2+2x+a=0$

このことより、Cに $y=0$ を代入したときに、aの値にかかわらず、$x=2$を解としてもつことがわかる。

∴ (ウ)＝2

次に⓪～④のグラフは何を意味しているのだろうか。（k＝(ウ)より $k=2$）

これはCを微分して得られた $y=f'(x)$ のグラフである

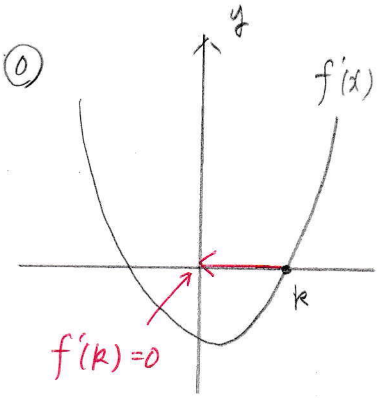
$f'(x)=3x^2+a-4$ で 2次関数である．

⓪～④のグラフのちがいは，$y=f'(x)$ のグラフに $x=k$ を代入したときの y の値…つまり $f'(k)$ が ⓪ $f'(k)=0$． ① $f'(k)>0$，かつ $f'(0)<0$

② $f'(k)>0$ かつ $f'(0)>0$ ④ $f'(k)<0$

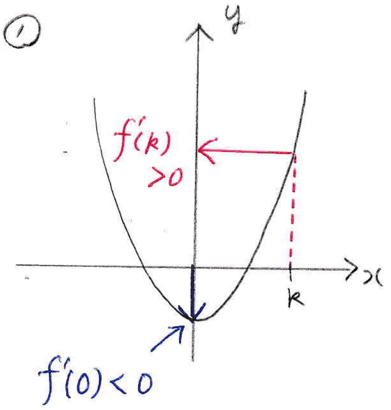
のちがいである．

⓪



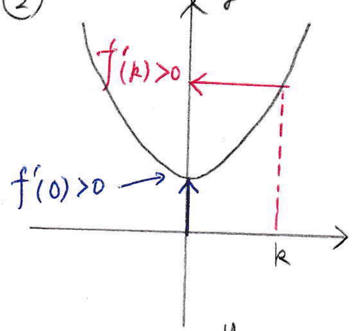
$f'(k)=0$.

①



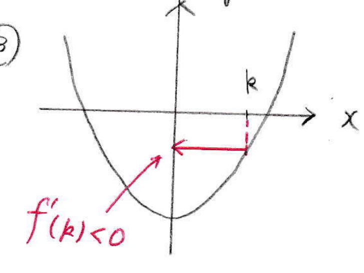
$f'(k)>0$ かつ $f'(0)<0$

②



$f'(k)>0$ かつ $f'(0)>0$.

③



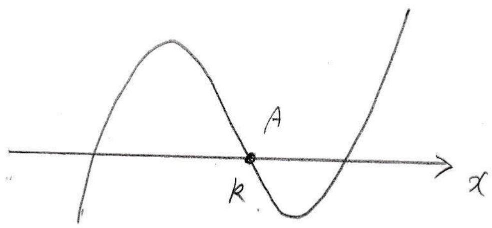
$f'(k)<0$

$f'(k)$ や $f'(0)$ の値や符号はどこでわかるのか…

増減表である！

⓪

x	…	?	…	?	…
$f'(x)$	あ	0	い	0	う
$f(x)$	え	A	お	B	か



$f(x)=x^3+(a-4)x-2a$.

$f'(x)=3x^2+a-4$

と符号もわからない定数 a が入ってしまっているので，増減表が埋められない！

しかし，下の C のグラフの概形を見れば，埋められる！

グラフより，Aが極大値，Bが極小値とわかる．

したがって あ $+$ い $-$ う $+$ である．

そして，え ↗ お ↘ か ↗ となる

また，グラフより，$k=2$ は極大値と極小値の間…つまり ⓪ の部分にいることがわかる．

増減表から い が $f'(x)$ の符号を示す

∴ $f'(k)<0$ である．

したがって 正解は ③…(エ) である．

(2) C上の点P$(1,\ f(1))$における接線をlとする。

lの方程式は

$y=(a-\boxed{\text{(オ)}})x-\boxed{\text{(カ)}}a-\boxed{\text{(キ)}}$

であり、Cとlの共有点のx座標は1と$\boxed{\text{クケ}}$

である。

$1<p\leqq 2$のとき、Cの$-p\leqq x\leqq p$の部分と

lおよび2直線$x=-p$, $x=p$で囲まれた図形

の面積を$S(p)$とすると、

$S(p)=\boxed{\text{コ}}\,p$

である。

hが0でないとき、pが$\sqrt{2}$から$\sqrt{2}+h$まで変化する

ときの$S(p)$の平均変化率

$$\frac{S(\sqrt{2}+h)-S(\sqrt{2})}{h}$$

において、hを0に限りなく近づけるとき、この式の

値は限りなく$\boxed{\text{サ}}$に近づく。

＜解答＞

$(a,\ f(a))$における接線の方程式

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

P$(1,\ f(1))$における接線を求める

$f(1)=1+a-4-2a$

$\quad=-a-3$

$f'(1)=3+a-4$

$\quad=a-1$

$\therefore\ y-(-a-3)=(a-1)(x-1)$

$y=(a-1)x-a+1-a-3$

$\quad=(a-1)x-2a-2$

$\therefore$ オ…1, カ…2, キ…2

Cとlの共有点を求める⇒連立

$x^3+(a-4)x-2a=(a-1)x-2a-2$

$x^3+(a-4-a+1)x-2a+2a+2=0$

$x^3-3x+2=0$

$x=1$を解としてもつことは既にわかっているから

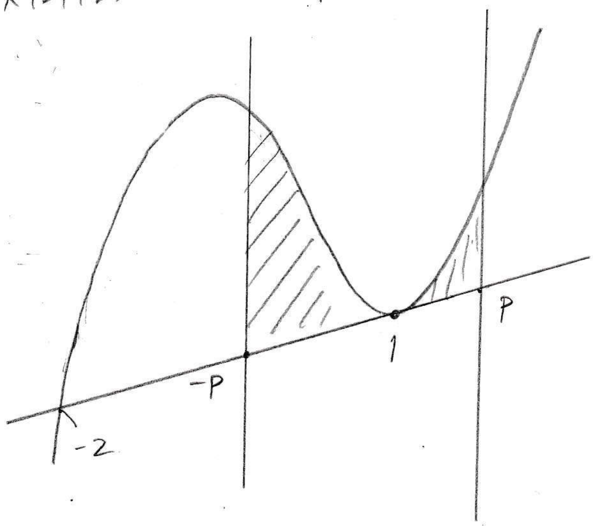
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$(x-1)(x^2+x-2)=0$

$(x-1)(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1,\ -2$ …クケ

次に行こう



ちょっと作図が難しいが

$1<p\leqq 2$のとき、Cの$-p\leqq x\leqq p$の部分とlおよび$x=p$, $x=-p$で囲まれた図形の面積$S(p)$は上の斜線部のイメージである。

$$\int_{-p}^{p} x^3+(a-4)x-2a-\{(a-1)x-2a-2\}\,dx$$

$$= \int_{-p}^{p}(x^3-3x+2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-p}^{p}$$

$$= \frac{1}{4}\cancel{(p^4-p^4)}-\frac{3}{2}\cancel{(p^2-p^2)}+2(p+p)$$

$$= 4p.$$

$\therefore$ $S(p)=4p.$ …コ

hが0でないとき、pが$\sqrt{2}$から$\sqrt{2}+h$まで

変化するときの$S(p)$の平均変化率を求める.

$S(p)=4p$ に、$p=\sqrt{2}+h$, $p=\sqrt{2}$

を代入して、計算する

$$\frac{S(\sqrt{2}+h)-S(\sqrt{2})}{h}$$

$$= \frac{4(\sqrt{2}+h)-4\sqrt{2}}{h}$$

$$= \frac{\cancel{4\sqrt{2}}+4h-\cancel{4\sqrt{2}}}{h}$$

$$= 4.$$

したがって、hを0に限りなく近づけると、$S(p)$は

限りなく 4 に近づく …(サ)