進研模試 11月 1年生 2020年

2

[1] 実数 x, y があり, $x^2+y^2=7$, $xy=-1$ を満たしている。

(1) $(x-y)^2$, $(x+y)^2$ の値をそれぞれ求めよ。

<解答>

$(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$ である

$= x^2+y^2-2xy$ と変形できるから

$= 7-2\times(-1)$

$= 7+2$

$= 9$ //

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

$= x^2+y^2+2xy$

$= 7+2\times(-1)$

$= 7-2$

$= 5$ //

(2) $0<x<-y$ とする。$x-y$, $x+y$ の値をそれぞれ求めよ。また、このとき $x^2-y^2+2x+2y$ の値を求めよ。

<解答>

(1)より $(x-y)^2=9$ であるから,

$x-y=\pm 3$ となる。

ここで $x-y$ が ± 3 となったので 与えられた条件から $x-y$ の符号が絞り込めるかどうか確かめよう。

「$0<x<-y$」から「x」も「$-y$」も正の数であることがわかる。

そこで、$x-y$ を $x+(-y)$ と変形し、

ともに正の数である数の和であることから、

$x-y$ は正であることがわかる。

したがって、$x-y=3$ //

同様に $(x+y)^2=5$ より

$x+y=\pm\sqrt{5}$

「$0<x<-y$」より「$x<-y$」を抽出。

$x<-y$

$x+y<0$ と変形でき、このことから

$x+y$ は負であるとわかる。

したがって、$x+y=-\sqrt{5}$ //

最後に $x^2-y^2+2x+2y$ の値を求めよう

$x+y=-\sqrt{5}$

$x-y=3$ がわかっているから、これを使う。

$x^2-y^2+2x+2y$ を変形して、

$(x+y)(x-y)+2(x+y)$ となる。

それぞれ代入すると

$-\sqrt{5}\times 3+2\times(-\sqrt{5})$

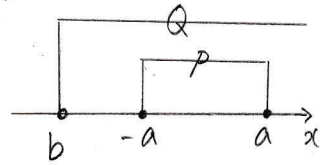
$=-3\sqrt{5}-2\sqrt{5}$

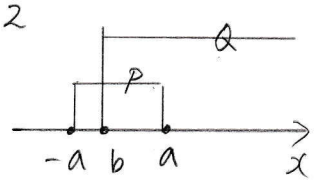
$=-5\sqrt{5}$

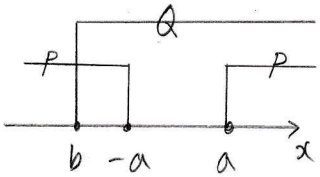
---

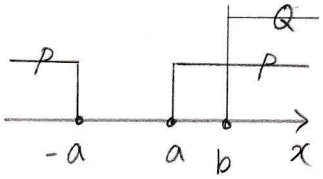
[2] a, bは実数であり、$a>0$とする。Uを実数全体の集合とし、Uの部分集合 $P=\{x \mid |x|\geqq a\}$, $Q=\{x \mid x\geqq b\}$ を考える。

(i) 数直線上に表した集合 P, Qについて、$P\supset Q$ であるものを、次の1〜4のうちから1つ選べ

1


2


3


4


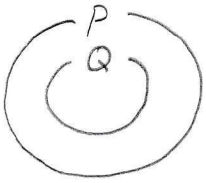
<解答>

「$P\supset Q$」→この意味を覚えているだろうか。

「$\supset$」この記号は集合の記号で、1つの集合が、もう1つの集合に「含まれている」ことを表している。

今回の「$P\supset Q$」であれば、「集合Qは集合Pに含まれている（PはQを含んでいる）」ということを示す。

ベン図で表すと



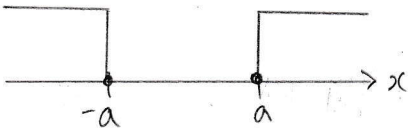
になる。したがって、集合Qは集合Pの中に、完全に入っていて、はみ出してはいけない。

そして、まず $P=\{x \mid |x|\geqq a\}$ を解かなければならない。（解かくなくてもぶっちゃけ答、わかっちゃうけど…一応！）

「$|x|\geqq a \Rightarrow x\leqq -a,\ a\leqq x$」となるから。

絶対値不等式のはずし方（簡易版）は最後にまとめてあります。

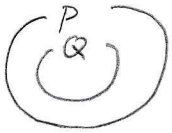
数直線上に図示すると



となるから

正しいのは3か4である。

そして、3か4のうち



となっている

ものは、4である。したがって、正解は 4

(ii) $P\supset Q$ となるような a, bの関係式として正しいものを、次の1〜4のうちから一つ選べ

1. $-a\leqq b$　2. $-a\geqq b$　3. $a\leqq b$　4. $a\geqq b$

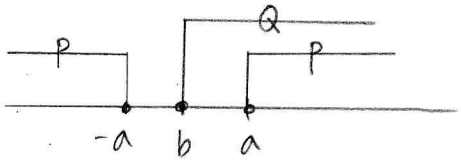
<解答>これは何を聞かれているのか、ちょっと理解に苦しむかもしれないけど、要するに1〜4の不等式を1つずつ見て、(i)の4の数直線で示している通りの、正しい不等式をえらべ、ということです。

したがって、1〜4を1つずつ見ていきましょう。

1. $-a \leqq b$ ⇒ これは一見正しいように見えるが、

$-a$ と a の間に b が来てもOK、ということになるため、そのとき条件に合わなくなる

×



↑ これも $-a \leqq b$、これでは $P \supset Q$ にならず ×

2. $-a \geqq b$ ⇒ これは全く論外、(i)の3の数直線の位置関係です。

×

3. $a \leqq b$ ⇒ これであれば4の位置関係を正しく表しています。

○

4. $a \geqq b$ ⇒ これも論外、3の数直線です。

×

したがって、正解は 3 //

(iii) c を実数とする。U の部分集合 $P' = \{x \mid |2x-1| \geqq 3\}$ $Q' = \{x \mid x+1 \leqq 2x-c\}$ を考える。$P' \supset Q'$ となるような c の値の範囲を求めよ。

<解答> (i)(ii)で用いた考え方を使って解いて行こう。

まず P' を解こう。

$|2x-1| \geqq 3$ ⇒ $2x-1 \leqq -3$、$3 \leqq 2x-1$

$2x-1 \leqq -3$	$3 \leqq 2x-1$
$2x \leqq -2$	$4 \leqq 2x$
$x \leqq -1$	$2 \leqq x$

∴ $x \leqq -1$, $2 \leqq x$

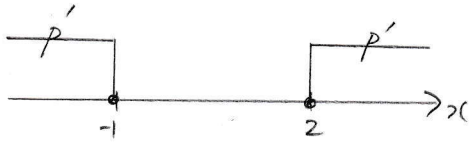
次に Q' を解こう。

$x+1 \leqq 2x-c$

$-x \leqq -c-1$

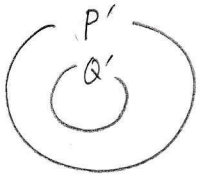
$x \geqq c+1$

これらを数直線上に表す。P' は書けるが、Q' は c があるから書き込めない。



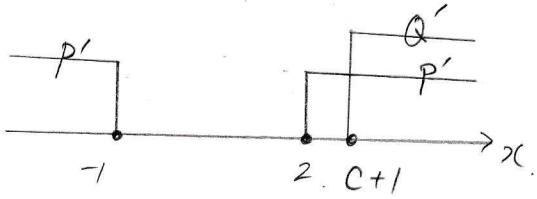
ここに Q' である「$x \geqq c+1$」を

$P' \supset Q'$



となるように適当に「$x \geqq c+1$」を書き込む

(ii)を参照すると、



とこうなればよいことがわかる。

そして、それを不等式に表すとき、(ii)を参考にして、

$2 \leqq c+1$ となればよいから、

$c \geqq 1$ //

・絶対値不等式のはずし方(簡易版)

絶対値のはずし方は ①簡易版 ②正式版 とあります。今回のような単純な絶対値のときは①でよいです。では、どういうときに①ではダメか。

① 絶対値の中にも外にも x がある。
② 絶対値が複数ある。

①の例

$|2x+3| \leqq x-9$

のようなとき

②の例

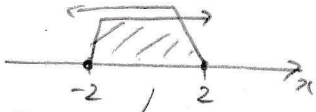
$|x|+|2x+1| \geqq 4$

など

これ以外であれば ①簡易型でよいです

〈はずし方〉

ⓐ $|x| \leqq 2$



$\Rightarrow -2 \leqq x \leqq 2$

ⓑ $|x| \geqq 2$

$\Rightarrow x \leqq -2,\ 2 \leqq x$

※ $|2x+1| \leqq 2$ のときも同様

$\Rightarrow -2 \leqq 2x+1 \leqq 2$

$|2x+1| \geqq 2$

$\Rightarrow 2x+1 \leqq -2,\ 2 \leqq 2x+1$

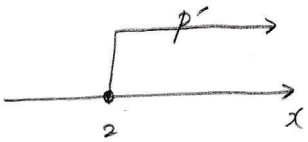
②の正式版はまた次回以降に…

ちなみに…

$2 \leqq C+1$ の等号（$\leqq$）について

コレ

のとき、等号は必要か不要か!?



P'が $x \geqq 2$ である。

Q'が $x \geqq C+1$ である。

この場合、「$2 < C+1$」か「$2 \leqq C+1$」が正解なのかを考えよう。

$2 < C+1$ と $2 \leqq C+1$ のちがいは、

$2 = C+1$ は、P'⊃Q'を成り立たせるかどうかである。

（$2 < C+1$ であれば $C+1$（Q'の範囲）に2は含まれない。$2 \leqq C+1$ であれば含まれることになる）

つまり、Q'の範囲に2が含まれても、P'⊃Q'は成り立つかどうかを考える。

当然 $x \geqq 2$ であるから、P'には含まれている。

Q'に2が含まれた場合、P'⊃Q'は成り立つか…

というと…、成り立つよね！

ポイント！

P'に含まれないものがQ'に含まれていればダメだ。

P'に含まれているものは、Q'はいくら含んでいてもOKだから、$C+1=2$ はP'⊃Q'が成り立つことになる。

したがって、$2 \leqq C+1$ が正解なのである。