第1回ベネッセ駿台記述模試　3年生

2020年　Y4　図形と方程式　(50点)

aを0でない定数とする．円C_1：$x^2+y^2-4x-2ay+4-4a^2=0$と直線l：$2x-y-2=0$があり，C_1の中心をAとする．また，lに関してAと対称な点を中心とし，半径がC_1の半径の$\frac{1}{5}$である円をC_2とする．ただし，C_1とC_2の中心は異なるものとする．

(1) 点Aの座標とC_1の半径をaを用いて表せ．

＜解答＞ C_1の方程式を平方完成させよう．

$$x^2+y^2-4x-2ay+4-4a^2=0$$

$$x^2-4x+y^2-2ay=4a^2-4$$

$$x^2-4x+4+y^2-2ay+a^2=4a^2-4+4+a^2$$

$$(x-2)^2+(y-a)^2=5a^2$$

$$(x-2)^2+(y-a)^2=(\sqrt{5}|a|)^2$$

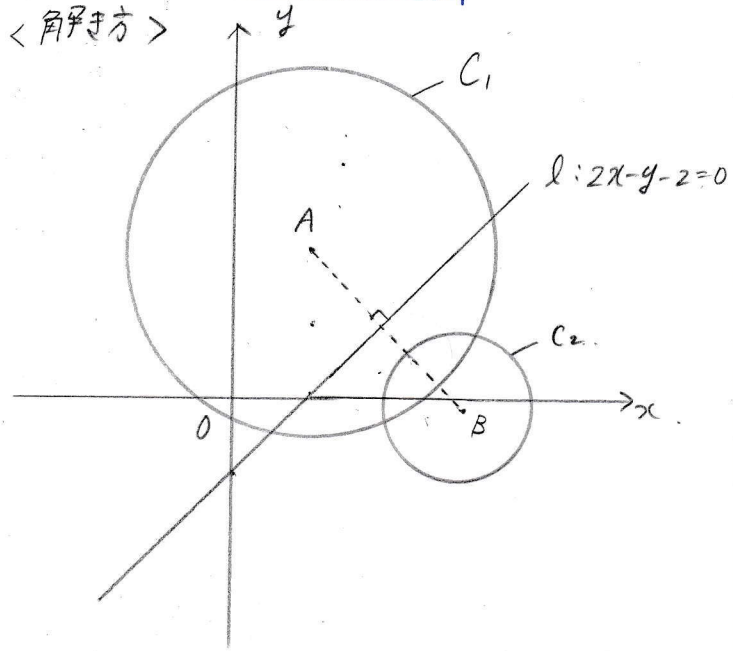
aは正負がわからない
半径は正だから，絶対値を忘れずにつけよう！

$\sqrt{a^2}=|a|$

$\therefore$ A$(2, a)$　半径$\sqrt{5}|a|$

(2) C_2の方程式をaを用いて表せ．

＜解き方＞



C_2の中心を求めよう．中心をB(s, t)とする．Bはlに関してAと対称な点である．

ABとlの交点を$C(x_1, y_1)$とすると，CはA, Bの中点であるから，

$$(x_1, y_1)=\left(\frac{s+2}{2}, \frac{t+a}{2}\right)$$

$$① \begin{cases} x_1=\dfrac{s+2}{2} \\ y_1=\dfrac{t+a}{2} \end{cases}$$

Cはl上の点であるから，$2x-y-2=0$に①を代入する．

$$2\cdot\frac{s+2}{2}-\frac{t+a}{2}-2=0$$

$$s+2-\frac{t+a}{2}-2=0$$

$$s-\frac{t+a}{2}=0$$

$$2s-t-a=0 \quad \cdots ②$$

次に直線ABの式を求め，そこにC_2の座標を代入する．

ABはlと直交するから，ABの傾きをmとすると…

$$(l\text{の傾き})\times m=-1$$

l：$2x-y-2=0$

$y=2x-2$より

$$2m=-1$$

$$m=-\frac{1}{2}$$

A$(2, a)$を通るから，

$$y-a=-\frac{1}{2}(x-2)$$

$y-a=-\frac{1}{2}x+1$.

$y=-\frac{1}{2}x+1+a$.

$C(x_1, y_1)$はこの直線を通るから.

$y_1=-\frac{1}{2}x_1+1+a$.

これらに①を代入する.

$$\frac{t+a}{2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{s+2}{2}+1+a.$$

$2(t+a)=-(s+2)+4+4a$.

$2t+2a=-s-2+4+4a$.

$s+2t-2a-2=0$ …③

$$\begin{cases} ② & 2s-t-a=0. \\ ③ & s+2t-2a-2=0 \end{cases}$$

連立してx_1, y_1を解く.

$$\begin{array}{rl} & 2s-t-a=0. \\ -) & 2s+4t-4a-4=0 \\ \hline & -5t+3a+4=0. \end{array}$$

$5t=3a+4$

$t=\frac{3a+4}{5}$

$s=-2t+2a+2$.

$=-2\cdot\frac{3a+4}{5}+2a+2$

$=\frac{-6a-8}{5}+\frac{10a+10}{5}$

$s=\frac{4a+2}{5}$.

C_2の半径はC_1の半径の$\frac{1}{5}$だから.

$\frac{\sqrt{5}}{5}|a|$

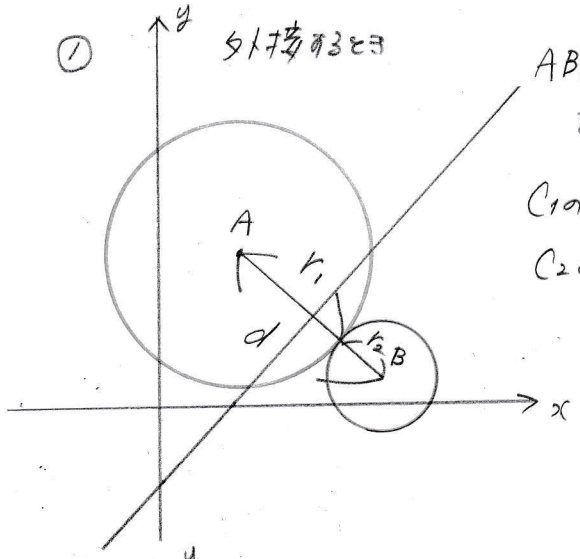
$$\therefore \left(x-\frac{4a+2}{5}\right)^2+\left(y-\frac{3a+4}{5}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{5}|a|\right)^2$$

$$\left(x-\frac{4a+2}{5}\right)^2+\left(y-\frac{3a+4}{5}\right)^2=\frac{1}{5}a^2.$$

(3) C_1とC_2が接するとき, aの値をすべて求めよ.

<解き方> 内接するときと外接するときがある.

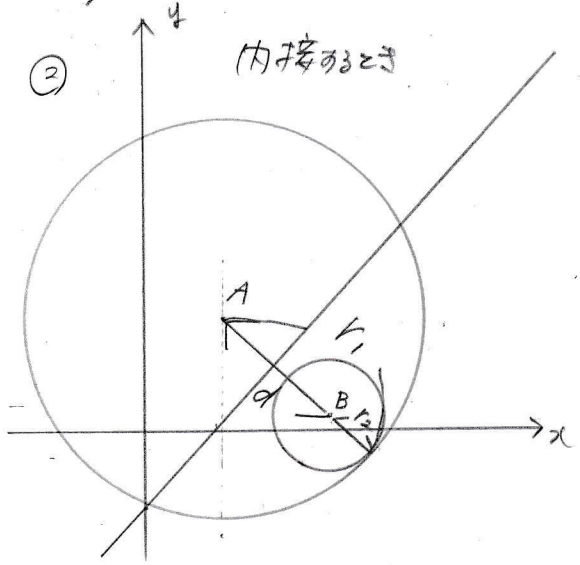
①



AB間の距離をd.

C_1の半径をr_1, C_2の半径をr_2とする.

②



① 外接するとき

$r_1+r_2=d$.

② 内接するとき

$r_1-r_2=d$. である.

$r_1 = \sqrt{5}|a|$　$r_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}|a|$

dはA(2, a) B($\frac{4a+2}{5}$, $\frac{3a+4}{5}$)間の距離.

$$d = \sqrt{\left(\frac{4a+2}{5} - 2\right)^2 + \left(\frac{3a+4}{5} - a\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4a-8}{5}\right)^2 + \left(\frac{-2a+4}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{16a^2-64a+64+4a^2-16a+16}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{20a^2-80a+80}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2-16a+16}{5}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{a^2-4a+4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{(a-2)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}|a-2|$$

① 外接するとき.

$r_1 + r_2 = d$ より

$$\sqrt{5}|a| + \frac{\sqrt{5}}{5}|a| = \frac{2\sqrt{5}}{5}|a-2|$$

$$\frac{6\sqrt{5}}{5}|a| = \frac{2\sqrt{5}}{5}|a-2|$$

$3|a| = |a-2|$　両辺2乗して

$9a^2 = a^2-4a+4$

$8a^2+4a-4=0$

$2a^2+a-1=0$

$(2a-1)(a+1)=0$.

$a = -1, \frac{1}{2}$

ここでaの確認.

重要事項!! ないと減点.

① aは0ではない

② C_1とC_2の中心は異なる

ここからaの適不適を確認.

A(2, a) B($\frac{4a+2}{5}$, $\frac{3a+4}{5}$)

$2 \neq \frac{4a+2}{5}$ であればよいから

$10 \neq 4a+2$

$4a \neq 8$

$a \neq 2$.

また $a \neq 0$ ∴ $a = -1, \frac{1}{2}$ は適する

② 内接するとき.

$r_1 - r_2 = d$.

$$\sqrt{5}|a| - \frac{\sqrt{5}}{5}|a| = \frac{2\sqrt{5}}{2}|a-2|$$

$$\frac{4\sqrt{5}}{5}|a| = \frac{2\sqrt{5}}{5}|a-2|$$

$2|a| = |a-2|$

$4a^2 = a^2-4a+4$

$3a^2+4a-4=0$.

$(3a-2)(a+2)=0$.

$a = -2, \frac{2}{3}$.　$a \neq 0$, $a \neq 2$ より適する.

∴ $a = -2, -1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$