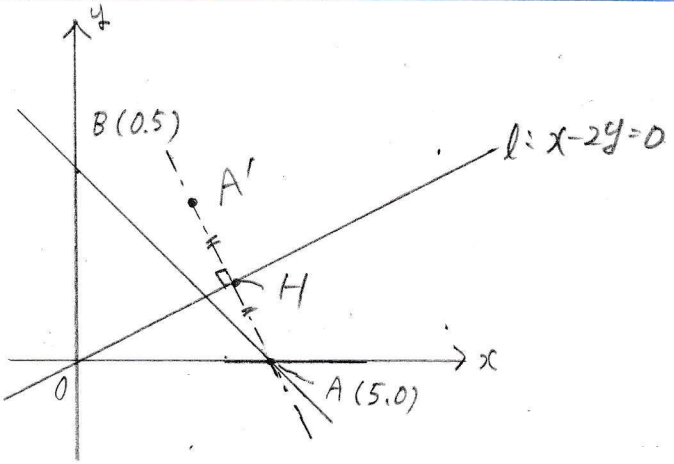
第2回 全統模試（8月） 3年生

2（図形と方程式）

Oを原点とするxy平面上で、直線 $l: x-2y=0$ を考える。点(5,0)をA，点(0,5)をBとし、Aを通り l に垂直な直線と l との交点をH，l に関してAと対称な点をA′とする。

(1) Hの座標を求めよ，また、A′の座標を求めよ。



<解答> 点Hは l と垂直な直線で、点Aを通る直線と、l との交点。

垂直な二直線の傾き

それぞれの傾きを m，n とすると

$$m \cdot n = -1$$

l の傾きを求める。

$x-2y=0$

$y=\frac{1}{2}x$ より $\frac{1}{2}$

-----の直線の傾きを m とすると

$\frac{1}{2} \times m = -1$ より

$m=-2$

また、A(5,0)を通るから

$y-0=-2(x-5)$

$y=-2x+10$

これと l との交点を求める。

$l: x-2y=0$

$y=\frac{1}{2}x$

$\frac{1}{2}x=-2x+10$

$x=-4x+20$

$5x=20$

$x=4$ $\quad y=\frac{1}{2}\cdot 4=2$

よって、 H(4,2)

次に、A′を求める。

① 直線AA′の式を求める。

② A′(x,y)とおく

③ AとA′の中点がHとする式を作り x,yを求める。

① AA′の式を求める。

AA′は l と垂直、点Aを通る。

$y=\frac{1}{2}x$

AA′の傾きを n とすると

$\frac{1}{2}\cdot n=-1$

$n=-2$

A(5,0)を通るから

$y-0=-2(x-5)$

$y=-2x+10$ … AA′

③ $A'(x, y)$ とおく

④ $A(5, 0)$ と $A'(x, y)$ との中点が

$H(4, 2)$ であるから、

$$\left(\frac{5+x}{2}, \frac{0+y}{2}\right)$$

$= H(4, 2)$

$$\frac{5+x}{2} = 4 \qquad \frac{y}{2} = 2$$

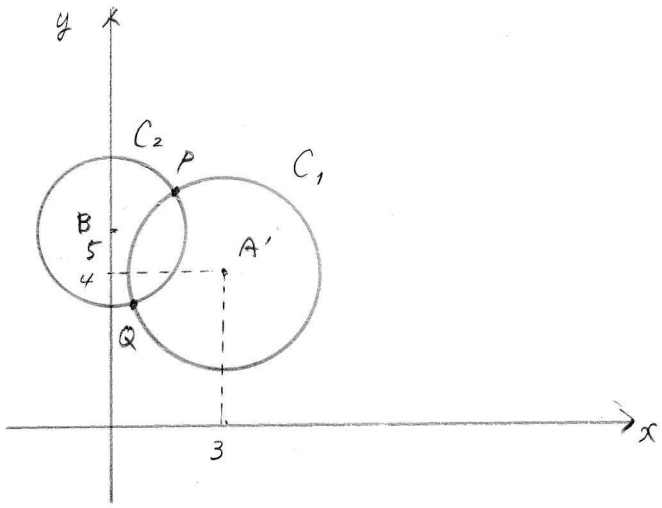
$5+x=8 \qquad y=4$

$x=3$

$\therefore A'(3, 4)$

(2) A' を中心とする半径 r の円を C_1、B を半径とする半径2の円を C_2 として、C_1 と C_2 が異なる2点 P, Q で交わるとする。

(i) r のとり得る値の範囲を求めよ



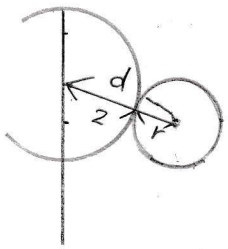
<解き方> A' と B の距離を d とする。

C_1 と C_2 が外接しているとき

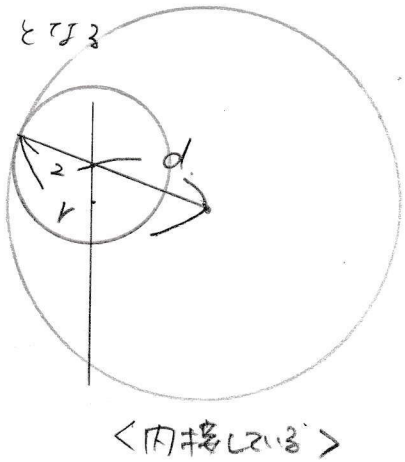
$r+2=d$ である。

C_1 と C_2 が内接しているとき

$|r-2|=d$ となる



<外接している>



<内接している>

d の値を求めよう。

$A'(3, 4)$ $B(0, 5)$ の距離

$$d = \sqrt{(3-0)^2+(4-5)^2}$$

$$= \sqrt{9+1}$$

$$= \sqrt{10}$$

<外接しているとき>

$r+2=\sqrt{10}$

$r=\sqrt{10}-2$

<内接しているとき> $|r-2|=\sqrt{10}$

$r^2-4r+4=10$.　　$r>0$より

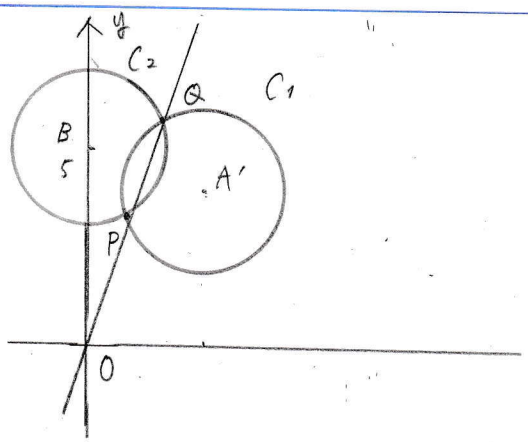
$r^2-4r-6=0$　　$r=2+\sqrt{10}$

$r=2\pm\sqrt{4+6}=2\pm\sqrt{10}$

異なる2点P,Qで交わっているときのrの取り得る値の範囲は,

$$\sqrt{10}-2<r<\sqrt{10}+2$$

(ii) 直線PQがOを通るとき,rの値を求めよ.



<解き方>

C_1 と C_2 の方程式を求める.

$C_1:(x-3)^2+(y-4)^2=r^2$

$x^2-6x+9+y^2-8y+16=r^2$

$x^2+y^2-6x-8y+25-r^2=0$

$C_2:x^2+(y-5)^2=4$

$x^2+y^2-10y+25=4$

$x^2+y^2-10y+21=0$

「2つの円の交点を通る円,直線」の公式

異なる2点P,Qで交わる2つの円

$x^2+y^2+l_1x+m_1y+n_1=0$ …①

$x^2+y^2+l_2x+m_2y+n_2=0$ …② に対し,

kを定数とすると.

$k(x^2+y^2+l_1x+m_1y+n_1)+x^2+y^2+l_2x+m_2y+n_2=0$

↑

この方程式を表す図形が…

$k=-1$ のとき,P,Qを通る直線となる.

$k\neq-1$ のとき,P,Qを通る円となる.

↑この公式を用いればよいぞ!

kはC_1でもC_2でもどちらにつけても0くだ!

$x^2+y^2-6x-8y+25-r^2+k(x^2+y^2-10y+21)=0$

"直線"だから $k=-1$ である

$x^2+y^2-6x-8y+25-r^2-x^2-y^2+10y-21=0$

$-6x+2y+4-r^2=0$.

$6x-2y-4+r^2=0$

この直線が原点(0,0)を通るから

$6\cdot0-2\cdot0-4+r^2=0$

$r^2=4$

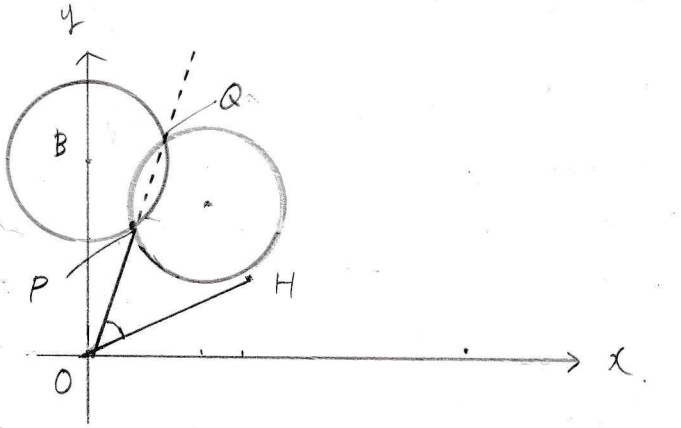
$r=\pm2$.

$\sqrt{10}-2<r<\sqrt{10}+2$.

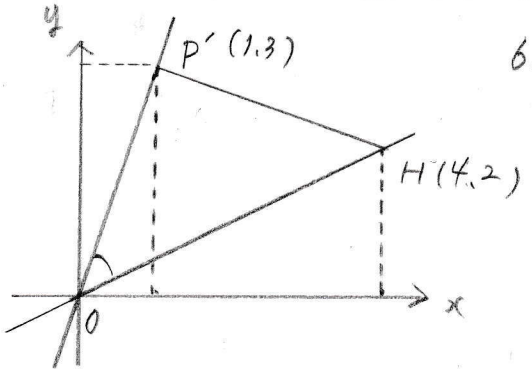
$3<\sqrt{10}<4$ より

$r=2$.

(iii) (ii)のとき,$\angle POH$を求めよ.



余弦定理を用いる



直線PQ $6x-2y-4+k^2=0$

$6x-2y-4+4=0$

$y=3x$

点Pや点Qの座標を求めたいが、面倒。

$\angle POH$を求めればよいから、点Pは直線PQ上の点であればどこを用いてもよい。

PQは$y=3x$であるから、計算しやすい$(1,3)$を採用する。

Hは$(4,2)$、これを採用する

$\triangle P'OH$に余弦定理を用いる。

$OP'=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$P'H=\sqrt{(4-1)^2+(2-3)^2}$

$=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$OH=\sqrt{4^2+2^2}$

$=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$

$P'H^2=OP'^2+OH^2-2\cdot OP'\cdot OH\cdot\cos\angle P'OH$

$10=10+20-2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}\cdot\cos\angle P'OH$

$-20=-20\sqrt{2}\cdot\cos\angle P'OH$

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\angle P'OH$

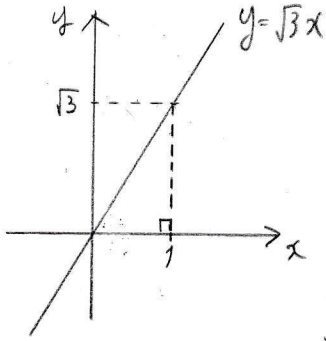
$\therefore \angle P'OH=45°, 135°$

直線OPの傾きより$\angle POH$は第1象限の角であるから、$90°$以下

$\therefore \angle POH=45°$

<別解> 下の2つの公式を用いる

公式①「傾き$=\tan\theta$」



$\tan\theta=\frac{y}{x}$

直線$y=mx$の傾き

$m=\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$

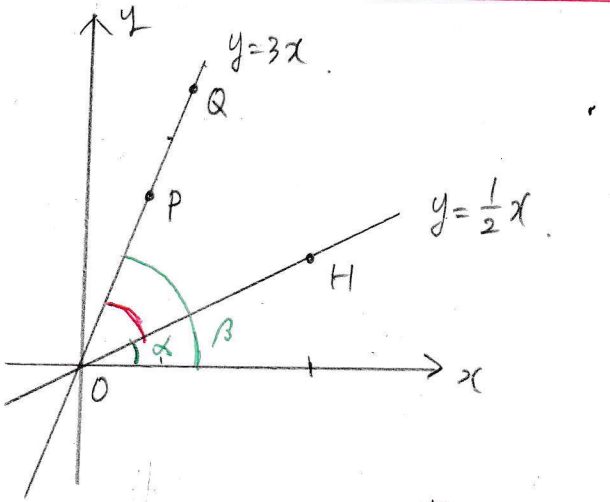
$\therefore m=\tan\theta$

公式②

$\tan\theta$の加法定理

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$



図のようにα, βと角を表すと

求めたい$\angle POH=\beta-\alpha$である。

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$　　$\tan\beta=3$である。

(公式①より $\tan\alpha$は$y=\frac{1}{2}x$ $\tan\beta$は$y=3x$の傾き)

$\tan\angle POQ = \tan(\beta-\alpha)$

加法定理より

$$= \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\cdot\tan\alpha}$$

$$= \frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}$$

$$= 1$$

$\tan(\beta-\alpha)=1$ より

$\beta-\alpha = 45°, 135°$

$\therefore \angle POH = 45°$