11月 進研模試　1年生 2020年

6 場合の数（20点）

1から9までの数字を使って4桁の整数を作り千の位、百の位、十の位、一の位を数をそれぞれ、a, b, c, dとする。ただし、同じ数字を何回使ってもよいものとする。

(1) a, b, c, d がすべて異なるような4桁の整数は全部で何個できるか。

＜解き方＞ 4桁の整数を □□□□ とする。4つの数字が全て同じでもよい、とすると（1111でも2324でも1345でも何でもよし）、9×9×9×9＝6561通りとなる。

すべて異なる数字（1234, 2457など）で作る場合は、千の位を9通りとすると、百の位は、千の位で使った数を1つ減らして8通り、十の位は2つ減らして7通り、1の位は3つ減らして6通り、となるから、

9・8・7・6＝3024 となる。

∴ 3024通り

(2) a＜b＜c＜d となるような4桁の整数は全部で何個できるか。また、a＝b＜c＝d となるような4桁の整数は全部で何個できるか。

＜解き方＞ これは、(1)とは全く異なる考え方を用いる。初めて見る人は「??」となるかもしれないが、よく読んでくれ。

「a＜b＜c＜d」となるとは、「1234」や「2579」などである。答えを先に述べると、「1～9の9つの数字の中から4つの数字を選ぶ、その選び方の数」が答えである。つまり、

$$_9C_4 = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 126$$ 通りである。

これはどうしてかを考えてみよう

1～9までの異なる数字をランダムに選ぶとする。すると、「1, 5, 3, 9」や「2, 6, 8, 3」、「4, 2, 1, 9」などたくさんの組み合わせがある。（その数が126通りあるわけだ）

では仮に「1, 5, 3, 9」を選んだとしよう。

今は、選んだだけだから、大小はバラバラだ。

ただこれを並べかえたときに、小→大となる並び方が1通りだけある　つまり「1, 3, 5, 9」である。

このことは全ての数字の選び方に同じことが言える。

全126通りの数字の選び方に小→大となる並べ方が1通りだけあるから…

126×1＝126通り

したがってまとめると、a＜b＜c＜d となる4桁の整数は、1～9の数字の中から4つを選ぶ選び方の数と等しいのである。

↑これは重要公式として覚えておこう！

次に、a＝b＜c＝d を考える

これは上の考え方をつかえば簡単だ。b＜c となる2つの数を決めれば、aとdはそれらと同じでよい。

したがって、1～9の9つの数字から異なる2つの数字の選び方を計算すればよい。

$$\therefore\ _9C_2 = \frac{9\cdot8}{2\cdot1} = 36$$

∴ 126通り　36通り

(3). 1211のように、同じ数字がちょうど3回使われる4桁の整数は全部で何個できるか。また、ちょうど2種類の数字からなる4桁の整数は全部で何個できるか。

<考え方> これもまた変わった考え方を用いるから、初見の人には難しく感じるだろう。

まず、「3回使う文字」を選ぶ選び方を考える

(「1.1.1」「2.2.2」…などのように。) これは1〜9の中から1つ数字を選べばよいから 9通りである。

次に、それ以外の、1回だけ使われる数字の選び方。

たとえば「1.2.1.1」の内の「2」のえらび方だ。

↑この例で言えば、1以外の8この数字から1つを選ぶ選び方を数えればよいから 8通りだ。

今度に「1.1.1.3」を選んだとしよう。

あとはこの4たちを並べかえればよい。

$\frac{4!}{3!}$ ← 全通り

↖ 同じものの並べかえ(1.1.1)の組み合わせである！

$= 4$通り

これらをかけて… $9 \times 8 \times 4 = 288$

∴ 288通り

次に2種類の数字からなる4桁の整数を考える。

これは、2通りのパターンが考えられる。

2種類の数字が… ① 1個と3個となる場合。

② 2個と2個になる場合 …の2パターンである。

慣れていない人は ①を計算し忘れがちなので注意！

①は上の288通りをそのまま用いればよい。

②を計算しよう。

これは、「2.2.4.4」「1.3.3.1」などである。

まず2種類の数字をえらぶ。

$${}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36.$$

次にこれらを並べかえる。

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{\cancel{4}^{2} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 6.$$

↑ ↑ 同じものを含む順列が2種類あるから、これらの数の階乗である！

これらをかければよい。

$36 \times 6 = 216$通り

したがって

$288 + 216 = 504$通り