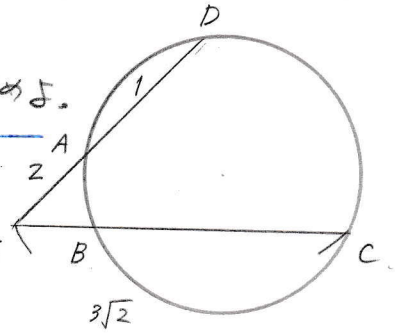
11月 進研模試 1年生 2020年

8 図形の性質（20点）

右の図のように円周上に4点A, B, C, Dがあり、2直線AD, BCの交点をEとすると、EA=2, AD=1, EC=$3\sqrt{2}$である。

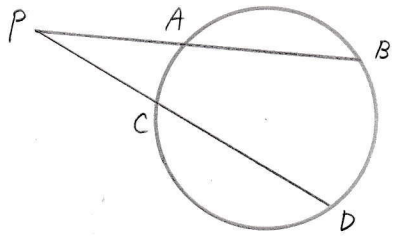
(1) 線分BEの長さを求めよ。



〈解き方〉

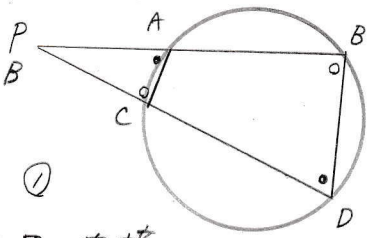
ここは方べきの定理を用いるだけでよい

方べきの定理（1）



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

《証明》



△PACと△PDBに着目

∠PACは共通 ①

四角形ACDBは円に内接している。

∠BAC+∠CDB=180°（対角の和は180°）

∠BAC+∠CAP=180°

したがって、∠CDB=∠CAP° ②

二角が等しいから △PAC∽△PDB

∴ PA:PD = PC:PB

変形すると、PA・PB = PC・PD

方べきの定理は三角形の相似が根拠。忘れてしまったら、そこから思い出そう！

$EA \cdot ED = EB \cdot EC$

$2 \cdot (2+1) = BE \cdot 3\sqrt{2}$

$6 = 3\sqrt{2} \cdot BE$

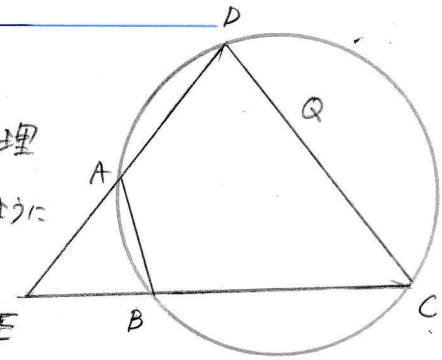
$BE = \frac{\cancel{6}}{\cancel{3}\sqrt{2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{2}$

$= \sqrt{2}$ //

(2) $\frac{AB}{CD}$ の値を求めよ。また、線分ACとBDの交点をP、直線EPと直線CDの交点をQとするとき、$\frac{CQ}{QD}$ の値を求めよ。



〈解き方〉

(1)の"方べきの定理の証明"で見たように△EABと△ECDは相似の関係である。

△EAB∽△ECD

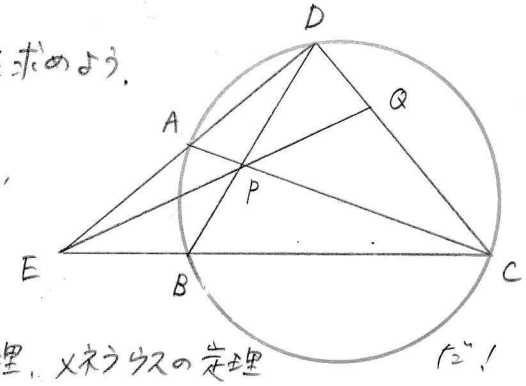
よって、AB:CD = EA:EC である。

EA:EC = 2:$3\sqrt{2}$ ← EDではない！注意！

したがって AB:CD = 2:$3\sqrt{2}$

$\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{3 \cdot \cancel{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ //

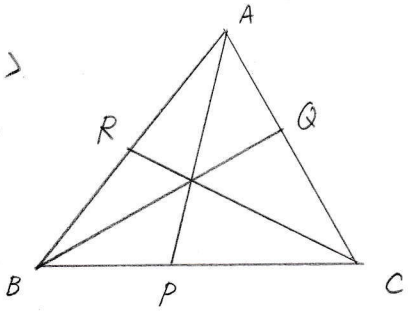
次に $\frac{CQ}{QD}$ を求めよう。



円と三角形、辺の比…を来たら、チェバの定理、メネラウスの定理だ！

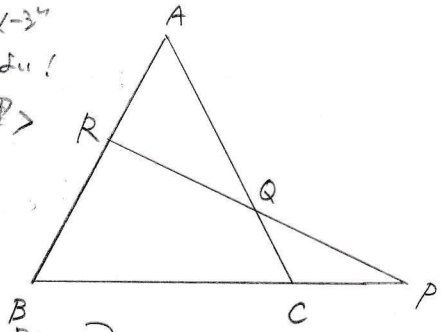
〈チェバの定理〉

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



三角形を一周するイメージ
どこからはじめてもよい！

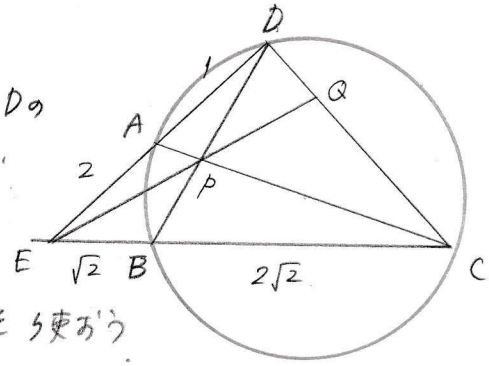
〈メネラウスの定理〉



はみ出してるPを拾いながら一周してくるイメージ
これもどこから始めてもよい

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

今回は△ECDの外の辺の比が多くわかるから、チェバの定理を使おう



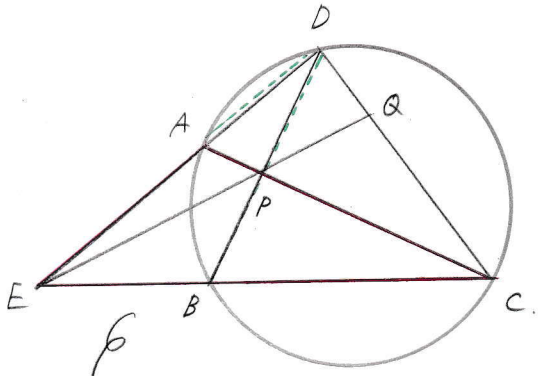
$$\frac{DA}{AE}\cdot\frac{EB}{BC}\cdot\frac{CQ}{QD}=1$$

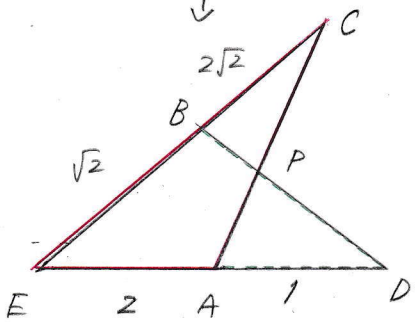
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{CQ}{QD}=1$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{CQ}{QD}=1$$

$$\frac{CQ}{QD}=4$$

(3) (2)のとき $\frac{AP}{PC}$ の値を求めよ。また△ABCの面積をS_1、△PCQの面積をS_2とする。このとき $\frac{S_1}{S_2}$ を求めよ。





△ECAを辺EAを底辺とするようにひっくり返して見ると、メネラウスの定理が見えてくる！

慣れないと発見難しく感じるが、慣れるとカンタン！すぐ見つかるぞ！

"三角形の内部の辺の比を聞かれたら、たいがいメネラウス"…と覚えておけば便利だ。

$$\frac{ED}{DA}\cdot\frac{AP}{PC}\cdot\frac{CB}{BE}=1$$

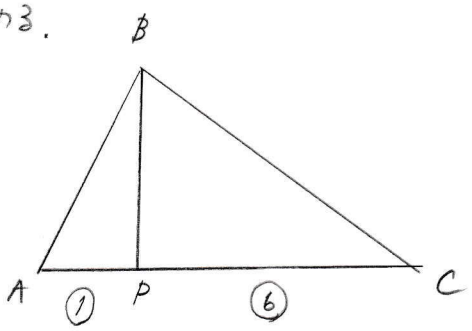
出っぱってるとこ拾って一周！

$$\frac{2+1}{1}\cdot\frac{AP}{PC}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$$

$$6\,\frac{AP}{PC}=1$$

$$\frac{AP}{PC}=\frac{1}{6}$$

次に $\frac{S_1}{S_2}$ を求める。



このタイプの問題は非常によく出るから、やり方を覚えてほしい。面積比 ⇒ 辺の比で求めていく！

まず、△ABCを抜き出してみた。

AP : PC = 1 : 6 と求めることができた。

△BAPと△BPCの面積比を考えると…

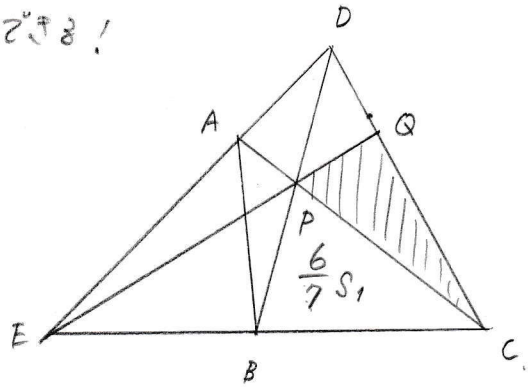
この2つの三角形は、高さが同じで、底辺が1:3である。したがって、面積比も1:3である！

そこから、△ABCと△BPCの面積比は…

1+6 : 6 = 7 : 6 ということがわかる！

したがって、$\triangle BPC = \frac{6}{7}S_1$ である！

と、これらをくり返していくと、$\triangle PCQ = S_2$ を ? S_1 で表すことができる！



今、$\triangle BPC = \frac{6}{7}S_1$ と出すことができた

ここから、△PDCにもちこめば、△PCQへ持っていくことができる！

そのためには、DP : PB を求める必要がある

これは、△DEBにメネラウスを適用すればよい

$$\frac{EC}{CB}\cdot\frac{BP}{PD}\cdot\frac{DA}{AE}=1$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{BP}{PD}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\frac{BP}{PD}=\frac{4}{3}$$

$$BP : PD = 4 : 3$$

したがって、△BPCと△PDCは高さが同じで底辺が4:3であることがわかるから

$$\triangle BPC : \triangle PDC = 4 : 3$$

$$= \frac{6}{7}S_1 : \triangle PDC$$

$$4 : \triangle PDC = \frac{18}{7}S_1$$

$$\triangle PDC = \frac{9}{14}S_1$$

最後に、△PDC = △PDQ + △PCQ

△PDQと△PCQは高さが同じで底辺が

DQ : QC = 1 : 4

そこから、△PDC : △PCQ = 1+4 : 4

= 5 : 4

$\triangle PDC = \frac{9}{14}S_1$ より

$$\frac{9}{14}S_1 : \triangle PCQ = 5 : 4$$

$$5\triangle PCQ = \frac{18}{7}S_1$$

$$\triangle PCQ = \frac{18}{35}S_1$$

したがって、

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\cancel{S_1}}{\frac{18}{35}\cancel{S_1}} = \frac{1}{\frac{18}{35}}$$

分母・分子に35をかけて…

$$\frac{35}{18} = \frac{S_1}{S_2}$$

※これはいろんな三角形を使って、いろんなパターンができる。答えが $\frac{35}{18}$ になればOKだから、

いろいろやってみよう！