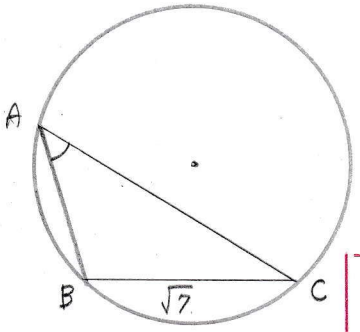
2年・「進研模試」11月 2018年

A2 図形と計量 (20点)

∠BACが鋭角である△ABCにおいて、BC=$\sqrt{7}$、外接円の半径が2である。

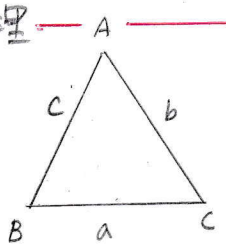
(1) sin∠BACの値を求めよ。 (5点)



<解答・解説>

正弦定理を活用しよう

正弦定理



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

※Rは外接円の半径

$$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=2R$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\sin\angle BAC}=2\cdot 2$$ ※両辺逆数を取る

$$\frac{\sin\angle BAC}{\sqrt{7}}=\frac{1}{4}$$

$$\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

(2) cos∠BACの値を求めよ。またAB:AC=1:2であるとき、辺ABの長さを求めよ。 (7点)

<解答・解説> cos∠BACを求める。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いる

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2+\cos^2\theta=1$$

$$\cos^2\theta=1-\frac{7}{16}$$

$$=\frac{9}{16}$$

$$\cos\theta=\pm\frac{3}{4}$$

∠BACは鋭角である。

$0<\theta<90^\circ$ のとき $0<\cos\theta<1$ より

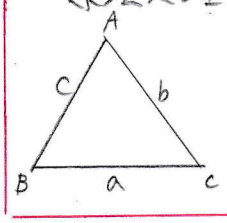
$$\cos\theta=\frac{3}{4}$$

次にABの長さを求める。

AB:AC=1:2 。 AB=x とおくと AC=$2x$

これに余弦定理に代入してみよう

余弦定理



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$$

$$\sqrt{7}^2=x^2+(2x)^2-2\cdot x\cdot 2x\cdot\cos\angle BAC$$

$$7=x^2+4x^2-4x^2\cdot\frac{3}{4}$$

$$7=5x^2-3x^2$$

$$7=2x^2$$

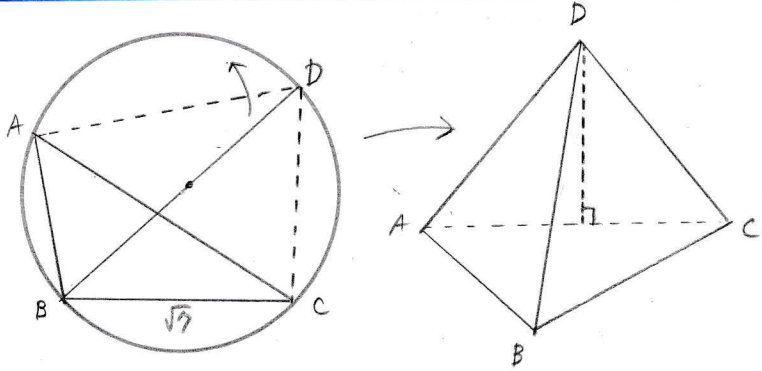
$$x^2=\frac{7}{2}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$$ $x>0$ より $x=\sqrt{\frac{7}{2}}$

$$=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

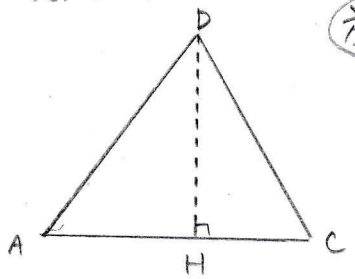
$$\therefore \cos\angle BAC=\frac{3}{4} \quad AB=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

(3) (2)のとき、△ABCの外接円の周上に点Dを取り、線分BDが直径となるようにする。△ACDを、線分ACを折り目として△ABCと垂直になるように折り曲げるとき、四面体DABCの体積を求めよ。 (8点)



四面体DABCの体積を求める.

高さをDHとする.



方針 面積を用いる..

△DACの面積を,

$S=\frac{1}{2}DA\cdot DC\cdot \sin\angle ADC$

で求める.

次にその面積を用いて

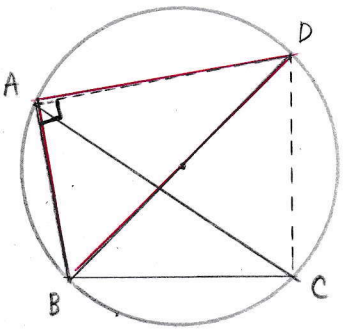
$S=AC\times DH\times\frac{1}{2}$ に

あてはめることによって DHを

求める.

∴まず $S=\frac{1}{2}DA\cdot DC\cdot \sin\angle ADC$ を求める.

DAを求めよう



△DABに着目.

∠DABは直径BDの円周角だから∠DAB=90°.

三平方の定理を用いて..

$AB^2+DA^2=BD^2$

$AB=\frac{\sqrt{14}}{2}$ $BD=2\times2=4$

$\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2+DA^2=4^2$

$\frac{14}{4}+DA^2=16$

$DA^2=16-\frac{7}{2}$

$=\frac{25}{2}$

$DA=\frac{5}{\sqrt{2}}$

$=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

DCも同様に

$BC^2+DC^2=BD^2$

$(\sqrt{7})^2+DC^2=4^2$

$DC^2=16-7$

$DC^2=9$

$DC=3$.

$\sin\angle ADC$を求めよう.

△DACに正弦定理を用いて..

$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=2R$ $AC=\sqrt{14}$ ((2)より)

$\frac{\sqrt{14}}{\sin\angle ADC}=2\cdot2$

$\frac{\sin\angle ADC}{\sqrt{14}}=\frac{1}{4}$

$\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{14}}{4}$

$\therefore S=\frac{1}{2}DA\cdot DC\cdot\sin\angle ADC$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}$

$=\frac{15\sqrt{28}}{16}$

$=\frac{15\cdot\cancel{2}^{1}\sqrt{7}}{\cancel{16}_{8}}$

$=\frac{15\sqrt{7}}{8}$

また $S=AC\cdot DH\times\frac{1}{2}$ だから

$\frac{15\sqrt{7}}{8}=\sqrt{14}\cdot DH\cdot\frac{1}{2}$

$15\sqrt{7}=4\sqrt{14}\cdot DH$

$DH=\frac{15\sqrt{7}}{4\sqrt{14}}$

$=\frac{15}{4\sqrt{2}}$

$=\frac{15\sqrt{2}}{8}$

それぞれ四面体DABCの体積を求めよう

△ABCの面積を求めよう

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} \cdot \sqrt{14} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{14\sqrt{3}}{16}$$

$$= \frac{7\sqrt{3}}{8}$$

$$V = \frac{7\sqrt{3}}{8} \times \frac{\overset{5}{\cancel{15}}\sqrt{2}}{8} \times \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{35\sqrt{14}}{64}$$