3年「全統模試・記述」10月 2020年

(I型) 4 整数の性質 (40点)

整数 x, y の方程式

$$171x + 55y = 1 \quad \cdots (*)$$

がある。

(1) $(*)$ の整数解 (x, y) を1組求めよ。

<解答・解説>

「ユークリッドの互除法」を用いよう。

① 171を55で割る。次に55をその余りで割る…と次々と計算し、余りが1になるまで計算する

$$171 \div 55 = 3 \cdots 6$$

$$55 \div 6 = 9 \cdots 1$$

② ①の式を余りが先頭になるように変形する

$$6 = 171 - 55 \cdot 3$$

$$1 = 55 - 6 \cdot 9$$

③ 下の式に上の式を次々と代入し、1つの式に集約する。

$$1 = 55 - 6 \cdot 9$$

代入

$$6 = 171 - 55 \cdot 3$$

$$1 = 55 - (171 - 55 \cdot 3)9$$

$$= 55 - 171 \cdot 9 + 55 \cdot 27$$

計算できる。

$$1 = 55 \cdot 28 - 171 \cdot 9$$

$$1 = 171(-9) + 55 \cdot 28$$

これで $171x + 55y = 1$ と同じ形になった!

$$\therefore (x, y) = (-9, 28)$$

(2) $(*)$ の整数解を全て求めよ。

<解答・解説>

(1)より $171(-9) + 55 \cdot 28 = 1$

$(*)$ とこの式の差を求める

$$\begin{array}{rl} & 171x + 55y = 1 \\ -) & 171(-9) + 55 \cdot 28 = 1 \\ \hline & 171(x+9) + 55(y-28) = 0 \end{array}$$

$$171(x+9) = -55(y-28)$$

171と−55は互いに素であるから

$$\begin{cases} x + 9 = -55k \\ y - 28 = 171k \end{cases} \quad (k\text{は整数})$$

とおくことができる。

$$x = -55k + 9$$

$$y = 171k + 28$$

<別解> $171(x+9) + 55(y-28) = 0$

$$-171(x+9) = 55(y-28)$$

$$\therefore \begin{cases} x + 9 = 55k \\ y - 28 = -171k \end{cases} \quad (k\text{は整数})$$

$$\therefore x = 55k - 9$$

$$y = -171k + 28$$

(3) (*)の整数解 (x, y) で x^2+2y を6で割ったときの余りが3であるものを考える。そのような (x, y) のうち、x が2020に最も近い組を求めよ。

<解答・解説>

(*)の $(x, y) = (55k-9, -171k+28)$ である

x^2+2y のうち、直接 ↑ これらを代入してしまうと、とんでもなく大きい数となり、解法が見えない。

そこで、x^2 と $2y$ に分けて攻略していく。

まず計算しやすい $2y$ を見てみよう

$$2y = 2\times(-171y+28)$$
$$= -342y+56$$

これを6で割ることを考える。

$$= 6(-57k+9)+2$$

したがって、$2y$ を6で割ると余りは2である。

そこから、x^2 を6で割ると余りが1となることが導ける。

そんな x を見つけるために $x=6m+\alpha$ (m, α は整数) とおいてみよう。x^2 が6の倍数であるためには、x も6の倍数でなければならないからである。

① $x=6m$ のとき　$x^2=(6m)^2=36m^2=6\cdot 6m^2$

※ x^2 は6で割り切れてしまう = 不適

② $x=6m+1$ のとき

$$x^2=(6m+1)^2=36m^2+12m+1$$
$$=6(6m^2+2m)+1 \quad \text{OK!}$$

③ $x=6m+2$ のとき

$$x^2=(6m+2)^2=36m^2+24m+4$$
$$=6(6m^2+4m)+4 \quad \text{不適}$$

④ $x=6m+3$ のとき

$$x^2=(6m+3)^2=36m^2+36m+9$$
$$=6(6m^2+6m+1)+3 \quad \text{不適}$$

⑤ $x=6m+4$ のとき

$$x^2=(6m+4)^2=36m^2+48m+16$$
$$=6(6m^2+8m+2)+4 \quad \text{不適}$$

⑥ $x=6m+5$ のとき

$$x^2=(6m+5)^2=36m^2+60m+25$$
$$=6(6m^2+10m+4)+1 \quad \text{OK!}$$

①〜⑥より

x を6で割った余りが1または5のとき条件をみたすことがわかる。… [1]

$x=55k-9$ であるから、ここから条件をみたす2020に最も近い x を探す

$$55k-9=2020$$
$$55k=2029$$
$$k=36.8\cdots$$

$k=36, 37, 38\cdots$ と代入していくと…

① $x=55\cdot 36-9=1971$

$=6\cdot 328+3$ … 不適

② $x=55\cdot 37-9=2026$

$=6\cdot 337+4$ … 不適

③ $x=55\cdot 38-9=2081$

$=6\cdot 346+5$ … OK!

したがって $x=2081$ のとき、

x を6で割ると5余る数である。

$\Rightarrow x^2$ を6で割ると1余る。

このときの k は38。

$y=-171k+28$ に $k=38$ を代入し、

$=-171\cdot 38+28$

$=-6470$

$(x, y)=(2081, -6470)$