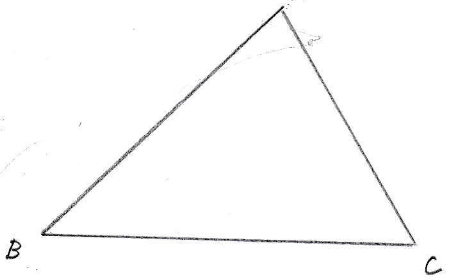
11月 進研模試 1年生 2019年

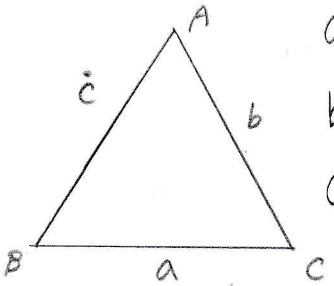
5 図形と計量 (20点)

AB=6, AC=5, $\cos A=\frac{3}{4}$ であるΔABCがある。
(1) 辺BCの長さを求めよ。



〈解答〉 余弦定理を用いよう。

余弦定理



$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$

$=36+25-\cancel{2}\cdot\cancel{6}\cdot 5\cdot\frac{3}{\cancel{4}}$

$=61-45$

$=16$

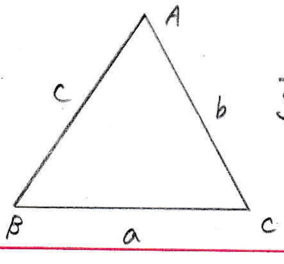
$BC=4$

$\therefore BC=4$

(2) $\sin C$の値を求めよ。

〈解答〉 正弦定理を用いよう

正弦定理



$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

$=2R$

Rは△ABCの外接円の半径.

$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}$ とする

$\cos A\to\sin A$を求めよう.

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より.

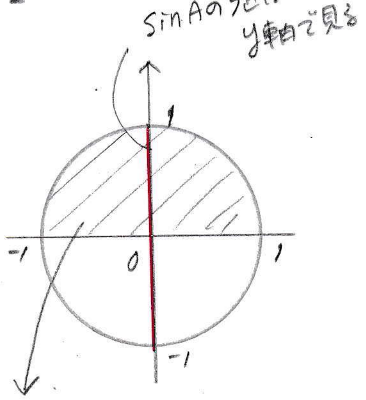
$\sin^2 A=1-\cos^2 A$

$=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$=1-\frac{9}{16}$

$=\frac{7}{16}$

$\sin A=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$



sinAの値は $0°\leqq A\leqq 180°$では.

$0<\sin A<1$ となるから…

∠Aは三角形の内角だから180°未満

$\sin A=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore \frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{6}{\sin C}$ 左辺の分母と分子に4をかける

$\frac{16}{\sqrt{7}}=\frac{6}{\sin C}$ 両辺とも逆数をとる.

$\frac{\sqrt{7}}{16}=\frac{\sin C}{6}$

$\sin C=\frac{\sqrt{7}}{\cancel{16}_{8}}\cdot\cancel{6}^{3}$

$=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\therefore \sin C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

(2)の別解

余弦定理でcosCを求め、cosC→sinC とすることもできる。

余弦定理より

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2\cdot BC\cdot AC}$$

$$= \frac{16+25-36}{2\cdot 4\cdot 5}$$

$$= \frac{41-36}{2\cdot 4\cdot 5}$$

$$= \frac{\cancel{5}\,1}{2\cdot 4\cdot \cancel{5}\,1}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$\sin^2 C+\cos^2 C=1$ より

$$\sin^2 C = 1-\cos^2 C$$

$$= 1-\frac{1}{64}$$

$$= \frac{63}{64}$$

$$\sin C = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$$

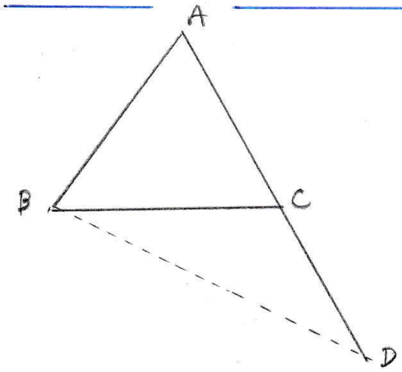
$$= \pm\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

sinCは正だから。

($0<C<180$ より　$0<\sin C\leqq 1$)

$$\therefore \sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

(3) 辺ACの点Cの延長線上に点Dを、△BCDの外接円の半径が $\frac{8}{3}$ となるようにとる。このとき、線分BDの長さを求めよ。また、△BCDの面積を求めよ。



<解き方> △BCDの外接円の半径である。

$$\frac{BD}{\sin\angle BCD} = 2R$$

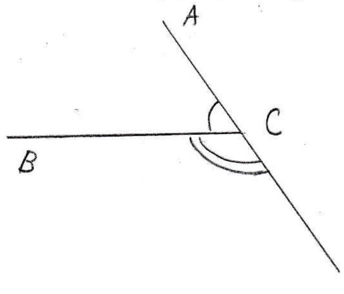
という形に持ち込みたい。

$R=\frac{8}{3}$ とわかっている　BDは求めたい長さ

つまり、$\sin\angle BCD$ がわかればよい。

(2)で $\sin C$ ($=\sin\angle ACB$) がわかっているから

これを利用すればよい。



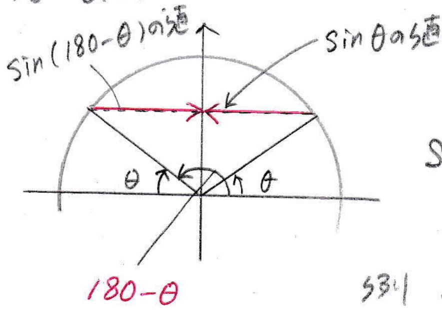
A, C, Dは一直線上である。

したがって

$\angle BCD = 180-\angle ACB$

である。

ここで $\sin(180-\theta)=\sin\theta$ という公式を思い出そう



左図の通り、$\sin\theta$ と $\sin(180-\theta)$ の値は等しい。

例) $\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって

$$\sin\angle BCD = \sin(180 - \angle ACB)$$
$$= \sin\angle ACB$$
$$= \sin C$$
$$= \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\frac{BD}{\sin\angle BCD} = 2R$$

$$\frac{BD}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = 2\cdot\frac{8}{3}$$

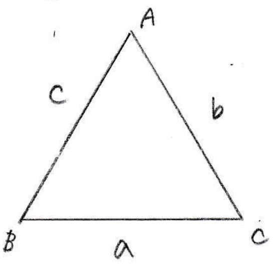
$$BD = \frac{\cancel{16}^{2}}{\cancel{3}_{1}} \times \frac{\cancel{3}^{1}\sqrt{7}}{\cancel{8}_{1}}$$

$$= 2\sqrt{7}$$

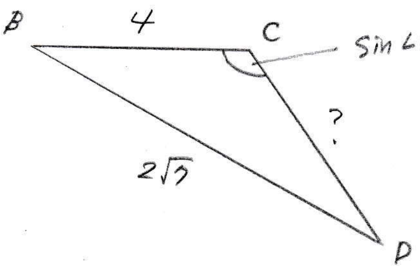
$$\therefore\ BD = 2\sqrt{7}$$

次に、△BCDの面積を求めよう。

面積公式



$$S = \frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin A$$
$$= \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin B$$
$$= \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin C$$



$\sin\angle BCD = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

したがって、CDの長さだけ求めれば求められる。

これは $\sin\angle BCD \to \cos\angle BCD$ に変えれば、

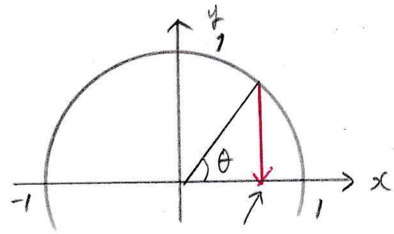
余弦定理を用いて、CDは求められる。

$$\sin^2\angle BCD + \cos^2\angle BCD = 1$$

$$\cos^2\angle BCD = 1 - \sin^2\angle BCD$$
$$= 1 - \left(\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)^2$$
$$= 1 - \frac{63}{64}$$
$$= \frac{1}{64}$$

$$\cos\angle BCD = \pm\frac{1}{8}$$

ここで $\cos\theta$ の符号について考えよう。



$\cos\theta$ の値

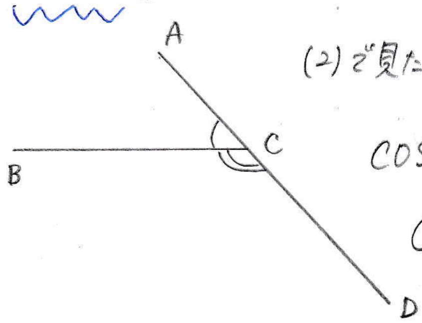
上図のように、$\cos\theta$ の値を単位円（半径1の円）で表したときに、$\cos\theta$ の値は、x軸に表れる。

そこから、以下のことがわかる

① $0° \leqq \theta \leqq 90°$ のとき　$0 \leqq \cos\theta \leqq 1$

② $90° < \theta \leqq 180°$ のとき　$-1 \leqq \cos\theta < 0$

である。つまり「θが鋭角のときは正、鈍角のときは負である」ということである。



(2)で見たように

$\cos C = \frac{1}{8}$ であったことから、

$C = \angle ACB$ は鋭角

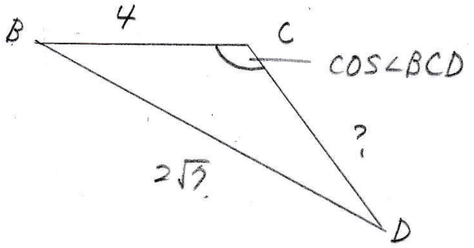
したがって、

$\angle BCD$ は鈍角である

∴ $\cos\angle BCD < 0$ になることから、

$$\cos\angle BCD = -\frac{1}{8}$$

では、余弦定理を用いて、CDを求めよう。



$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2\cdot BC\cdot CD\cdot \cos\angle BCD$$

$CD = x$ とすると、

$$(2\sqrt{7})^2 = 16 + x^2 - 2\cdot 4\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$28 = 16 + x^2 + x$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x+4)(x-3) = 0$$

$$x = 3, -4$$

$CD > 0$ より

$$CD = 3$$

では、面積を求めるぞ！

$$S = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD\cdot \sin\angle BCD$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}_1}\cdot \cancel{4}^{\cancel{2}\,1}\cdot 3\cdot \frac{3\sqrt{7}}{\cancel{8}_4}$$

$$= \frac{9\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore \frac{9\sqrt{7}}{4}$$

長かったね　おつかれさまでした…