

⑥ 場合の数と確率 (20点)

赤玉1個, 青玉2個, 白玉3個, 黒玉3個の合計9個の玉がある。ただし, 玉は色以外では区別がつかないものとする。

(1) 赤玉1個, 青玉1個, 白玉1個, 黒玉1個の合計4個の玉を横一列に並べる方法は全部で何通りあるか。

<解答・解説>

①・②・③・④ と4つの箱にそれぞれ玉を入ると考えよう,

①の箱には, 赤・青・白・黒, の4種類を入れることができる。

次に②には①に入れた色以外の3種類を,

③には①, ②以外の2種類を, 最後④には残りの1つを入れることができる

これを計算すると...

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{通り}$$

である

これは 4! という計算と同じであるね!

$$\therefore 24 \text{通り}$$

(2) 赤玉1個, 青玉1個, 白玉1個, 黒玉2個の合計5個の玉を横一列に並べる方法は全部で何通りあるか。また, 9個の玉のうち, どの色の玉も1個以上用いて, 合計5個の玉を横一列に並べる方法は全部で何通りあるか。

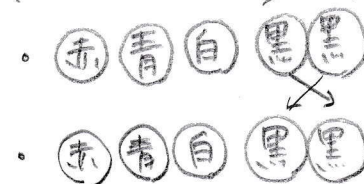
<解答・解説>

まず前半の問題。

赤, 青, 白は1個ずつ, 黒玉を2個で合計5個の玉を一列に並べる

(1)と同様に $5!$ とやりたいところだが, 「同じものが2つある」 (=黒玉が2個) ので, 重複する順列が $2! = 2 \times 1 = 2$ 通りずつ存在する

たとえば



このように並べた順列がカウントされている! 全組み合わせには, このと同様の重複が存在している!

したがって, これを割り除すには,

$$\frac{5!}{2!} \leftarrow \begin{array}{l} \text{同じものの数の} \\ \text{階乗で割る} \end{array}$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 60 \text{通り}$$

次に, 後半の問題

「9個の玉のうち, どの色の玉も1個以上用いて 合計5個の玉を横一列に並べる方法」

玉の種類は4種類

それぞれ1個以上用いて5個の玉の列を作るには, 上の問題と同様に

- どの色も1種類の玉を2個
- 残り3種の玉は1個ずつ という組み合わせになる

この計算方法は...

① 2個使う1種類の玉を決める
→ 残りの玉は1個ずつ, と自然と決まる

② 並べ方の組み合わせを計算する

③ 赤の①の組み合わせで②の並べ方の数があるから

① × ②

... という3つの手順で計算していく

① 2ヶ国使う玉の並び方

青、白、黒から1つ選ぶから
3通り (赤は1個しかない!)
↑ 注意!

② 玉の並べ方の組み合わせ

上と同様に

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

③ ① × ②

60通り
3 × 60 = 240 ... 180通り

(3) どの色の玉も1ヶ国以上用いて、合計6ヶ国の玉を横一列に並べる方法は全部で何通りあるか。

<解答・解説>

これは多くのパターンが考えられる。1つずつ見ていこう。
ポイントは「数が少ない玉から絞っていく」ことだ。

赤は1個しかないから、これは必ず使う。という場合分けが必要だ。残り5ヶ国を考慮しよう。
次に青が1ヶ国のみと2ヶ国のみがある。

[1] 青が1ヶ国のみ ⇒ 残り4ヶ国

白と黒で、最低1ヶ国ずつ使えば4ヶ国に満たない。

色の組み合わせは、「1:3」と「2:2」だけ。

白も黒も3ヶ国ずつあるから

① 白:黒 = 1:3 ② ①の逆 ③ 白:黒 = 2:2

の3パターンがある。

そして、それぞれで並べ方を考えていく。

[1] 青が1ヶ国のみ

① 白:黒 = 1:3

⇒ 並べ方 ○ △ □ ▲ ▲ ▲ の並べ方と考える。

$$\frac{6!}{3!} \leftarrow \text{同じもの階乗}$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{通り} \dots ①$$

② 黒:白 = 1:3

同様に 120通り ... ②

③ 白:黒 = 2:2

⇒ 並べ方 ○ △ □ □ ▲ ▲ の並べ方

$$\frac{6!}{2!2!}$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 180 \text{通り} \dots ③$$

[2] 青が2ヶ国のみ ⇒ 残り3ヶ国

④ 白:黒 = 1:2 ⑤ 黒:白 = 1:2 の2パターン

④ 白:黒 = 1:2

⇒ 並べ方 ○ △ ▲ □ ▲ ▲

$$\frac{6!}{2!2!}$$

$$= 180 \text{通り}$$

⑤ 黒:白 = 1:2 同様に 180通り

①~⑤より 120 × 2 + 180 × 3 = 240 + 540 = 780
通り