定番問題解説 <基礎編>

数Ⅱ② 二項定理 その2

～展開式の項の係数～

次の式の展開式における[ ]内の係数を求めよ。

(1) $(3x-2)^5$ $[x^3]$

<解説>

二項定理から導かれた"係数公式"を用いる

係数公式

$(a+b)^n$ の各項の係数は…

$${}_nC_r\, a^{n-r} \cdot b^r$$ で求める

これにあてはめることによって係数を簡単に求めることができる。

$$(\underbrace{3x}_{a}\underbrace{-2}_{b})^{5}\ [x^3]$$

$$\underset{n}{{}_5C_r} \cdot a^{\overset{n-r}{5-r}} \cdot b^{r}$$

※bは"-2"であるマイナスを忘れないように！

n=5はわかるのだが、rがわからないから、n-rもわからない。そこから明らかにしていく解き方の順序を解説しよう！

$${}_5C_r (3x)^{5-r} (-2)^r \quad \cdots ①$$

この式は後でガッツリ使うから丁寧に書いておいてね！

① まず、a、b、nの数値を公式に代入する。

② 次に、rの値を導く

ここで、$[x^3]$の項の係数がほしいことに着目！

$$(3x)^{5-r} \cdot (-2)^r$$

xはここにしかない！ここがx^3となるようにrを設定しよう！

$$(3x)^{5-r} = 3^{5-r} \cdot x^{5-r}$$

こうやってわけるとよいよ！

$$x^{5-r} = x^3$$

となればよいわけだ！

そして、

$$5-r=3$$
$$-r=-2$$
$$r=2$$ ← 出た！

①にr=2を代入する。

$${}_5C_2 (3x)^{5-2} \cdot (-2)^2$$

$$= \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2} \cdot 1} (3x)^3 \cdot (-2)^2$$

$$= 10 \cdot 27x^3 \cdot 4$$

$$= 1080x^3$$

$$\therefore 1080$$

この公式はすぐに忘れてしまう傾向がある！

時々練習するようにしたいね！

長時休みとか、模試の前とかにね…

(2) $(a+3)^7$ $[a^4]$

あとは習うより慣れろ！だ！

$_nC_r\, a^{n-r} \cdot b^r$ $n=7$ $a=a$ $b=3$

$_7C_r\, a^{7-r} \cdot 3^r$ … ①

rを求める

$a^{7-r} = a^4$ より

$7-r=4$

$-r=-3$

$r=3$

①に $r=3$ を代入

$_7C_3 \cdot a^{7-3} \cdot 3^3$

$= \frac{7 \cdot \cancel{6}^{1} \cdot 5}{\cancel{3}_{1} \cdot \cancel{2}_{1} \cdot 1} \cdot a^4 \cdot 27$

$= 35 \cdot a^4 \cdot 27$

$= 945a^4$

∴ 945

(3) $(x-2y)^7$ $[x^4y^3]$

$_nC_r \cdot a^{n-r} \cdot b^r$

$_7C_r\, x^{7-r} \cdot (-2y)^r$ … ①

rを求めよ！

$x^{7-r} \cdot y^r$ ← (−2)はちゃんとよそにおいとく r求めるだけだからジャマなので…

$= x^4y^3$ より

$7-r=4$ $r=3$ である

①に $r=3$ を代入

$_7C_3 \cdot x^4 \cdot (-2y)^3$

$\frac{7 \cdot \cancel{6}^{1} \cdot 5}{\cancel{3}_{1} \cdot \cancel{2}_{1} \cdot 1} \cdot x^4 \cdot (-2y)^3$

$= 35 \cdot x^4 \cdot (-8y^3)$

$= -280x^4 \cdot y^3$

∴ −280

(4) $(a+2b)^8$ $[a^6b^2]$

$_nC_r\, a^{n-r} \cdot b^r$

$_8C_r\, a^{8-r} \cdot (2b)^r$ … ①

rを求める

$a^{8-r} \cdot b^r = a^6b^2$ より

$r=2$ $8-r=6$

$-r=-2$

$r=2$

①に $r=2$ を代入

$_8C_2 \cdot a^6 \cdot (2b)^2$

$= \frac{\cancel{8}^{4} \cdot 7}{\cancel{2}_{1} \cdot 1} \cdot a^6 \cdot 4b^2$

$= 28a^6 \cdot 4b^2$

$= 112a^6b^2$

∴ 112

(5) $(3x^2-1)^6$ $[x^6]$ ← 今回はちょっと工夫がいるぞ！

$_nC_r\, a^{n-r} \cdot b^r$

$_6C_r\, (3x^2)^{6-r} \cdot (-1)^r$ … ①

rを求める

$(x^2)^{6-r}$

$= x^{12-2r}$

$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2$

$= a^6$ より

$(a^2)^3 = a^{2\times3} = a^6$

である

$x^{12-2r} = x^6$ より

$12-2r=6$

$-2r=-6$

$r=3$

①に $r=3$ を代入

${}_6C_3 \cdot (3x^2)^{6-3} \cdot (-1)^3$ ← ここ計算ていねいにね！

$= {}_6C_3 (3x^2)^3 \cdot (-1)^3$

$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 27x^6 \cdot (-1)$

$= 20 \cdot 27 \cdot x^6 \cdot (-1)$

$= -540x^6$

$\therefore -540$

(6) $(x^2-2x)^7$ $[x^{10}]$

${}_nC_r \cdot a^{n-r} \cdot b^r$

${}_7C_r (x^2)^{7-r} \cdot (-2x)^r$ … ①

-2はちょっとあっち行ってて…

$(x^2)^{7-r} \cdot x^r$

$= x^{14-2r} \cdot x^r$

$= x^{14-2r+r}$

$= x^{14-r}$

$x^{14-r} = x^{10}$ より

$14-r=10$

$-r=-4$

$r=4$

$a^2 \times a^3$

$= \underbrace{a \cdot a}_{a_2} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{a_3}$

$= a^5$ より

$a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$

①に $r=4$ を代入

${}_7C_4 \cdot (x^2)^{7-4} \cdot (-2x)^4$

$= {}_7C_4 \cdot (x^2)^3 \cdot 16x^4$

$= {}_7C_3 \cdot x^6 \cdot 16x^4$

$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 16x^{10}$

$= 35 \cdot 16 \cdot x^{10}$

$= 560x^{10}$

$\therefore 560$

⑤と⑥はちょっとムズいけど、
定期でも1〜2問は出ると思う。
やっとこうぜ！