［定番問題解説］

《基礎レベル編》

数学ⅡB $\boxed{4}$「不等式の証明」

［例題］

～イントロ～

「不等式の証明」の方法は以下の3種類に大別されます。

① (左辺) > (右辺) を証明したいとき

(左辺) − (右辺) > 0

※等号があるときは等号をつける

② (左辺) > (右辺) を証明したいとき

$(左辺)^2 - (右辺)^2 > 0$

※等号があるときは等号をつけて証明する。

③ (相加平均) ≧ (相乗平均)

を用いた証明。

以上3種のどれかでやれば99% OKです。

どんな式のときに、どのやり方を用いたらよいか、慣れてくれば、一瞬見ただけでわかります。

1つずつ解説していきましょう

［例題］の $\boxed{1}$ は①のパターン、$\boxed{2}$ が②のパターン、$\boxed{3}$ が③の典型的なパターンになります

見極めができれば不等式の証明はもらったようなものなので、「見極めの練習」という意味でやってみよう！

$\boxed{1}$ 次の不等式を証明せよ。

(1) $a^2+b^2 \geqq 2ab$

＜解説・解答＞

これは典型的な①のパターンだ。

前回の「等式の証明」と同じように、「証明の書き方」も意識して練習していこう

＜証明＞

左辺から右辺を引く

a^2+b^2-2ab

$= a^2-2ab+b^2$

$= (a-b)^2 \geqq 0$

ここで平方完成する。
$(\quad)^2$ とすることで
( )内がどんな数でも正となる！

左辺−右辺 ≧ したがって、$a^2+b^2 \geqq 2ab$ である。

また、等号成立は、$a-b=0$ のとき…つまり $a=b$ のときである。

＜証明終＞

※不等号にイコールがついているときは、「等号成立時の証明」も加えておく。

これは、$(a-b)^2=0$ となるときの条件、ということであるから、$a-b=0 \Rightarrow a=b$ のとき、ということになる。

(2) $a^2+ab+b^2 \geqq 0$

＜解説・解答＞

a^2+ab+b^2 → これはこのままでは平方完成できない。そこで無理矢理平方完成の形に持っていく

コツは「2つの平方の和」にもちこむこと！

$=\square^2+\bigcirc^2$ という形だ。

これであれば、正であると証明できる。

a^2+ab+b^2 ← ここを分解。

$=a^2+ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2$

$=(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2$ ← これでOK！

ではやってみよう！

<証明>

$a^2+ab+b^2\geqq 0$

<証明>

左辺を変形する

$(左辺)=a^2+ab+b^2$

$=a^2+ab+\frac{b^2}{4}+\frac{3}{4}b^2$

$=(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3}{4}b^2\geqq 0$

したがって $a^2+ab+b^2\geqq 0$ である

等号成立は $a+\frac{b}{2}=0$ かつ $\frac{3}{4}b^2=0$

のとき。 $b^2=0$ より $b=0$

$a+\frac{0}{2}=0$ より $a=0$

したがって、$a=b=0$ のとき

<証明終>

※ 等号成立は、

$\underbrace{(a+\frac{b}{2})^2}_{①}+\underbrace{\frac{3}{4}b^2}_{②}=0$ のときだ

①と②はともに0以上で、それらの和であるから、それぞれが0にならなければならない。

したがって、

$(a-\frac{b}{2})^2=0$ かつ $\frac{3}{4}b^2=0$

先にこちらを解く

次にこちらを解く

(3) $a^2+2ab+2b^2+2a+2\geqq 0$

<解説・解答>

これは変形に一工夫が必要。

まずは a を降べきの順に並べて平方完成。

そしてその後余りもので平方完成する。

$a^2+2(b+1)+2b^2+2$

$=\{a^2+2(b+1)+(b+1)^2\}-(b+1)^2+2b^2+2$

$=\{a+(b+1)\}^2-b^2-2b-1+2b^2+2$

$=\{a+(b+1)\}^2+b^2-2b+1$

$=(a+b+1)^2+(b-1)^2$ できた！

等号は $(a+b+1)^2=0$ かつ $(b-1)^2=0$

$\Rightarrow a+b+1=0$ かつ $b-1=0$

$b=1$

$a+1+1=0$

くれないよね!?

$(|a|+|b|)^2$ と $|a+b|^2$ の違いについて.

$(|a|+|b|)^2$ は、数におきかえてみると…

$(|3|+|-4|)^2$ みたいなものだから.

$=|3|^2+2|3||-4|+|-4|^2$

$=9+2\cdot12+16$

$=9+24+16$

$=49$ である.

したがって、公式化すると.

$(|a|+|b|)^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2$

$=a^2+2|ab|+b^2$ である

(注)

次に $|a+b|^2$ は…

$|3-4|^2$ だから. $|-1|^2=(-1)^2=1$

これは $|3-4|^2$

$=3^2-2\cdot3\cdot4+4^2$

$=9-24+16$

$=1$

となる.

同様に公式化すると.

$|a+b|^2$

$=a^2+2ab+b^2$

つまり $(a+b)^2$ と同じなのだ.

もう一度まとめると

$$\begin{cases}(|a|+|b|)^2=a^2+2|ab|+b^2 \\ |a+b|^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\end{cases}$$

それでは やってみよう

<証明>

(左辺)^2−(右辺)^2 を計算する.

$(|a|+2|b|)^2-(|a+2b|)^2$

$=a^2+4|a||b|+4b^2-(a+2b)^2$

$=a^2+4|ab|+4b^2-a^2-4ab-4b^2$

$=4|ab|-4ab$

$=4(|ab|-ab)$

ここで $|ab|-ab\geqq0$ であるから

$4(|ab|-ab)\geqq0$

(左辺)^2−(右辺)$^2\geqq0$ より

$|a|+2|b|\geqq|a+2b|$ である.

等号成立は $|ab|=ab$ のとき

つまり $ab\geqq0$ のときである

この解きる

$|ab|-ab=0$ となるときは.

$|ab|=ab$ のとき である.

$|ab|$ は $ab\geqq0$ のとき $|ab|=ab$

$ab<0$ のとき $|ab|=-ab$

となるから. $|ab|=ab$ となるのは.

$a+2=0$

$a=-2$

となる。慣れてきたかな？

では仕上げてみよう

〈証明〉

$(\text{左辺}) = a^2+2(b+1)a+2b^2+2$

$= a^2+2(b+1)a+(b+1)^2-(b+1)^2+2b^2+2$

$= \{a+(b+1)\}^2-b^2-2b-1+2b^2+2$

$= (a+b+1)^2+b^2-2b+1$

$= (a+b+1)^2+(b-1)^2 \geqq 0$

したがって $a^2+2ab+2b^2+2a+2 \geqq 0$ である

等号成立は $a+b+1=0$ かつ $b-1=0$ のとき

つまり $a=-2,\ b=1$ のときである

〈証明終〉

$\boxed{(4)\ (a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca)}$

〈証明〉

(左辺)−(右辺)を計算する。

$(a+b)^2+2(a+b)c+c^2-3ab-3bc-3ca$

$= a^2+2ab+b^2+2ca+2bc+c^2-3ab-3bc-3ca$

$= a^2-ab+b^2-ca-bc+c^2$

aで降べきの順に並べ、平方完成を順に行っていく。

$= a^2-(b+c)a+b^2-bc+c^2$

$= a^2-(b+c)a+\frac{(b+c)^2}{4}-\frac{(b+c)^2}{4}+b^2-bc+c^2$

$= \left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2-\frac{b^2+2bc+c^2}{4}+b^2-bc+c^2$

$= \left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2-\frac{3}{2}bc+\frac{3}{4}c^2$

$= \left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b^2-2bc+c^2)$

$= \left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2 \geqq 0$

すごい形だが「必ず平方完成できるはず！」と信じてやってみよう！

したがって

$(a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca)$

また、等号は

$a-\frac{b+c}{2}=0$ かつ $b-c=0$ のとき

つまり $b=c$

$a-\frac{b+b}{2}=0$

$a-b=0$

$a=b$

ここも複雑そうだが…基本通りにやってみると…

超シンプル！

したがって $a=b=c$ のとき 〈証明終〉

$\boxed{2}$ 次の不等式を証明せよ

$|a|+2|b| \geqq |a+2b|$

〈解答・解説〉

絶対値やルートのついた不等式の証明の時に②のパターンになることを覚えておこう！

$(|a|+2|b|)^2-|a+2b|^2$

これらの2乗の仕方…学校ではあまり詳しく教えて

$ab \geqq 0$ のとき、である。

ちょっと難しく聞こえるかも…だが、よく見ると

$4(|ab| - ab)$

$|ab|$ ↑ 絶対値だから正

$-ab$ ↑ もしここが負だったら

$|ab| - ab$ が0になることはない。

ab が正であるから

$|ab| - ab = 0$ となるのである。

よく考えたらあったりまえの話だ。

---

3 $a>0$, $b>0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$ab + \frac{1}{ab} \geqq 2$$

<解説・解答>

(相加平均) ≧ (相乗平均) の公式を用いる典型的な問題だ。

見極め方は…

$a>0$, $b>0$ のとき… ← 必ずついている！

$ab + \frac{1}{ab} \geqq 2$ ← 逆数っぽい2乗の和になっている！

これがポイントだ！

では、公式を確認してみよう。

(相加平均) ≧ (相乗平均)

$a>0$, $b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

ただし、等号成立は、$a=b$ のとき。

相加平均とは、$\frac{a+b}{2}$ …つまり2数の和の平均…見慣れてるね

相乗平均とは $\sqrt{ab}$ …つまり2数の積の平均…積の平均は平方根なんだね！

(相加平均) は常に (相乗平均) 以上になる、という公式だ。

等号成立について考えよう。

仮に $a=b$ としよう。

$\frac{a+b}{2}$ の b に a を代入すると $\frac{a+a}{2} = a$

$\sqrt{ab}$ も同様に a を代入すると $\sqrt{aa} = a$

したがって、$a=b$ のとき、(相加平均) = (相乗平均) となるのだ。

そして、必ず「$a>0$, $b>0$ のとき」の記述を忘れないようにね。

<証明>

$a>0$ $b>0$ より $ab>0$, $\frac{1}{ab}>0$ である。

(相加平均) ≧ (相乗平均) より

$$\left(ab + \frac{1}{ab}\right) \times \frac{1}{2} \geqq \sqrt{ab \cdot \frac{1}{ab}}$$

$$= 1$$

両辺に2をかけると、

$ab + \frac{1}{ab} \geqq 2$

等号成立は $ab = \frac{1}{ab}$ のとき.

つまり. $a^2b^2 = 1$

したがって. $ab = \pm 1$

$a>0$, $b>0$ より $ab = 1$ のとき

<証明終>