

① 小問集合 (20点)

次の□を正しくめよ。ただし、解答欄には答えのみを記入せよ。

(1) $(\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3)(\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3)$ を展開し、整理すると、□(?)となる。

<解説・解答> 工夫して計算しよう

$$(与式) = (\underbrace{\sqrt{3} + \sqrt{6}}_M + 3)(\underbrace{\sqrt{3} + \sqrt{6}}_M - 3)$$

$$= (M+3)(M-3)$$

$$= M^2 - 9 \quad \leftarrow \text{もとにむとす}$$

$$= (\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 - 9$$

$$= 3 + 2\sqrt{18} + 6 - 9$$

$$= 2 \cdot 3\sqrt{2}$$

$$= 6\sqrt{2}$$

$$\therefore 6\sqrt{2} \dots (?)$$

(2) 不等式 $|x - \sqrt{5}| < \sqrt{5} \dots$ ①の解は

□(1)である。①をみたすすべての整

数の値は □(4)である。

<解説・解答>

「絶対値のついた不等式」の問題だ。

(1)と(4)のちがいは何だろうか?

(1)は①をみたす「全てのx」で条件が成

(4)は①をみたすxの解のうち、整数の値のみを答えるという条件つき。

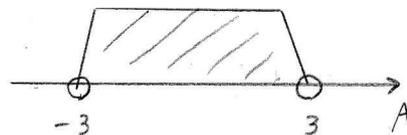
(1)は不等式を答える ($-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ のように) (4)は値を答える ($x=0, 1$ のように)

単純な不等式は簡易型ではやってみよう

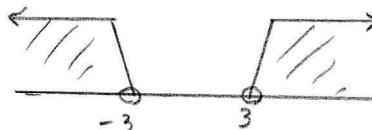
絶対値のついた不等式の求め方

<簡易型>

$$\textcircled{1} |A| < 3 \Rightarrow -3 < A < 3$$



$$\textcircled{2} |A| > 3 \Rightarrow A < -3, 3 < A$$



今回は $|x - \sqrt{5}| < \sqrt{5}$ であるから、①の公式だ。

$$\therefore -\sqrt{5} < x - \sqrt{5} < \sqrt{5}$$

辺々に $\sqrt{5}$ を加える

$$-\sqrt{5} + \sqrt{5} < x - \sqrt{5} + \sqrt{5} < \sqrt{5} + \sqrt{5}$$

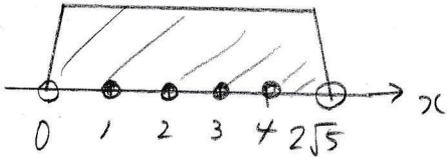
$$0 < x < 2\sqrt{5} \quad \leftarrow \text{これが(1)の答えだ。}$$

次に、このxの整数の値を求めよう

$2\sqrt{5} = \sqrt{20}$. ← $2\sqrt{5}$ とかわりに $\sqrt{20}$ を変換する

$\sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$ ← 整数になる $\sqrt{\quad}$ は 4 と 5 だけ

$0 < x < 2\sqrt{5} (= 4.47...)$ とする



$x = 1, 2, 3, 4$

($0 < x$ だから $x=0$ は含まない)

$0 < x < 2\sqrt{5} \dots (1)$
 $x = 1, 2, 3, 4 \dots (2)$

(3) x は実数とする。次の (E) にあてはまるものを下の 1~2 のうちから 1つ、(F) にあてはまるものを下の 3~6 のうちから 1つ 選ぶ。

(1) 命題「 $x^2=4$ ならば $x=2$ 」は (E) である。

- 1. 真
- 2. 偽

<解説・解答>

「 $x^2=4$ 」を P 。「 $x=2$ 」を Q とする。
 「 P ならば Q 」が真である。これは「 P が成り立つとき、必ず Q が成り立っている」ということである。
 「 $x^2=4$ が成り立つのは、必ず $x=2$ が成り立っている」ということだ。これは一見、合っているように見えるが、1つ注意がいる

これは「必ず $x=2$ が成り立っている」ということだ。「 $x^2=4$ ならば必ず $x=2$ 」というわけではない。「 $x^2=4$ ならば $x=-2$ 」もある。したがって「必ず $x=2$ 」というわけではない。したがって、「 P ならば Q 」は真ではない。よって、「偽」である。

- (ii) $x \neq 2$ かつ $x^2=4$ であることは、 $x^2=4$ であるための (カ) である。
3. 必要十分条件。
 4. 必要条件ではあるが 十分条件ではない。
 5. 十分条件ではあるが、必要条件ではない。
 6. 必要条件でも十分条件でもない。

<解説・解答>

「 $x \neq 2$ かつ $x^2=4$ である」を P 。「 $x^2=4$ である」を Q とおく。
 「 P ならば Q 」(= 「 $P \Rightarrow Q$ 」) が成り立っていることを「 P は Q であるための十分条件である」という。
 「 Q ならば P 」(= 「 $Q \Rightarrow P$ 」) が成り立っていることを「 P は Q であるための必要条件である」という。
 「 $P \Rightarrow Q$ 」「 $Q \Rightarrow P$ 」どちらも成り立つことを「 P は Q であるための必要十分条件である」という。

どちらも成り立たなければ、「PはQであるため
の必要条件も十分条件でもない」という

命題 P を見てみよう

「 $x \neq 2$ かつ $x^2 = 4$ である」とは...

①「 $x \neq 2$ である」とは、「 x は2以外の全ての整数」

②「 $x^2 = 4$ である」とは、「 $x = \pm 2$ 」である。

よって「かつ」だから、 x は①②をともに
満たさなければならぬ。

そのような x は「 $x = -2$ 」のみである。

したがって、Pにおける x は $x = -2$

次に命題 Q を見てみよう。

「 $x^2 = 4$ である」、... このときの x は $x = \pm 2$

この問題を読みかえると...

「 $x = -2$ であるならば $x^2 = 4$ である」の...」

とすることができる。

まず「 $P \Rightarrow Q$ 」を見てみよう

「 $x = -2$ ならば、 $x^2 = 4$ である」、これは明らかに
成り立っている！

次に「 $Q \Rightarrow P$ 」を見てみよう。

「 $x^2 = 4$ ならば $x = -2$ である」、これは成り立っ

ていないね！ だって、 $x^2 = 4$ ならば $x = \pm 2$ なん

だから！ 又は $x = -2$ というわけでははいか

らね！

したがって、「 P ならば Q 」のみが成り立って
いる。

このことから、「十分条件であるが必要条件では
ない、仮正解

2 ... (E) 5 ... (F)

(4) 花子さんは、こども会の準備で、お菓子
屋さんにクッキーとチョコレートを買に行きた。
クッキーは1個110円、チョコレートは1個150円
であり、クッキーとチョコレートを合わせて30個買
いたい。花子さんはチョコレートの個数を a とおき、
購入金額を、 a を用いて、(カ) (円) とした。
4000円以内で、チョコレートをできるだけ多く
買いたい。このとき、花子さんはチョコレートを (キ)
個買うことができる。

< 解説・解答 >

チョコレートの個数が a 個である。

合わせて30個だから、クッキーの個数は

$(30 - a)$ 個である。

購入金額は $110(30 - a) + 150a$ (円)

である。4000円以内で買える個数を求め
るには、

$$110(30 - a) + 150a \leq 4000$$

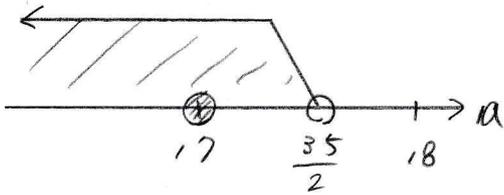
とすればよい。これを解くと...

$$3300 - 110a + 150a \leq 4000.$$

$$40a \leq 700.$$

$$a \leq \frac{70}{4} = \frac{35}{2}$$

$$a \leq \frac{35}{2} \left(17\frac{1}{2}\right)$$



a は自然数だから、最大の a は17.

$$\therefore 110(30-a) + 150a \dots (ア)$$

$$17 \times 2 \dots (イ)$$