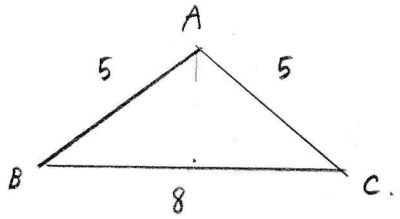
1年生「進研模試」過去問. 2020年・1月

4 三角比

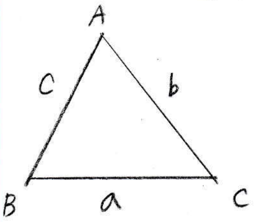
AB=AC=5, BC=8 のΔABCがある。

(1) $\cos B$の値を求めよ。



余弦定理を用いよう.

余弦定理



$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$(b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B)$$

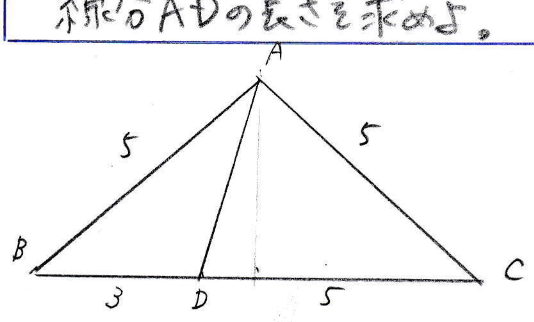
$$\cos B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}$$

$$= \frac{25+64-25}{2\cdot5\cdot8}$$

$$= \frac{\cancel{64}\ \cancel{8}\ 4}{\cancel{2}\cdot5\cdot\cancel{8}}$$

$$= \frac{4}{5}$$

(2) 辺BC上にBD=3となる点Dをとる。線分ADの長さを求めよ。



<解説・解答>

これも余弦定理を使おう.

ΔABDに着目する.

$$AD^2 = AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B$$

$$= 25+9-2\cdot5\cdot3\cdot\frac{4}{5}$$

$$= 34-24$$

$$= 10$$

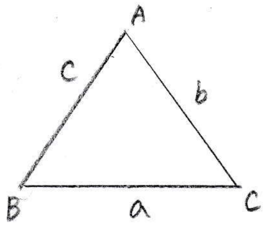
$AD=\sqrt{10}$。

また、ΔADCの外接円Kの半径を求めよ。

<解答・解説>

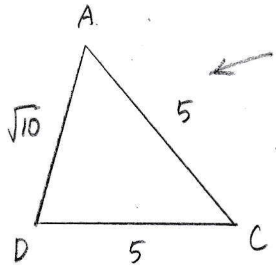
「三角形の外接円の半径」→正弦定理を用いる.

正弦定理



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

※Rは△ABCの外接円の半径



角度がわからないように見えるが…

AB=ACよりΔABCは二等辺三角形である.

したがって, $\angle B=\angle C$である.

$\cos B=\cos C$, $\sin B=\sin C$

COSB→ SinBに変換しよう

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$\sin B = \pm\sqrt{1-\cos^2 B}$

$0° < \angle B < 180°$ より $0 < \sin B \leqq 1$

したがって $\sin B = \sqrt{1-\cos^2 B}$

$= \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}$

$= \sqrt{1-\frac{16}{25}}$

$= \sqrt{\frac{9}{25}}$

$= \frac{3}{5}$

$\sin C = \sin B = \frac{3}{5}$

$2R = \frac{AD}{\sin C}$

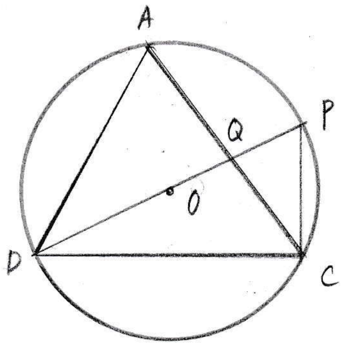
$= \frac{\sqrt{10}}{\frac{3}{5}}$

$2R = \frac{5\sqrt{10}}{3}$

$R = \frac{5\sqrt{10}}{6}$

(3) (2)のとき、円Kの中心をOとする。直線DOと円Kの交点のうち、Dでない方の点をPとし、直線DOと辺ACの交点をQとする。このとき、△DCPの面積を求めよ。また、線分CQの長さを求めよ。

＜解説・解答＞



△DCPの面積を求めよう

DPは直径である よって、∠PCD = 90° だ。

△DCPの面積は $CD \times CP \times \frac{1}{2}$

CPは三平方の定理で求められる

$CP = \sqrt{DP^2 - DC^2}$

DPは円Kの直径 $2 \times \frac{5\sqrt{10}}{6} = \frac{5\sqrt{10}}{3}$

$CP = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{10}}{3}\right)^2 - 25}$

$= \sqrt{\frac{250}{9} - \frac{225}{9}}$

$= \sqrt{\frac{25}{9}}$

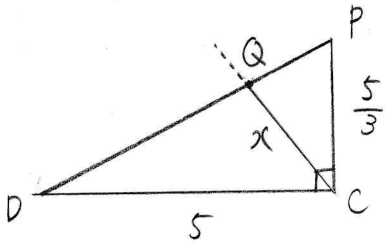
$= \frac{5}{3}$

△DCPの面積

$= 5 \times \frac{5}{3} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{25}{6}$

次にCQの長さを求めよう.



今,求めた面積を利用しよう.

$\triangle DCP = \triangle DCQ + \triangle PCQ$

$CQ = x$とおく

$\sin\angle DCQ = \sin C = \frac{3}{5}$.

$\sin\angle PCQ = \sin(90 - C)$ ← Point!

$= \cos C$

$= \frac{4}{5}$

$\triangle DCP = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot x \cdot \sin C$

$+ \frac{1}{2} CP \cdot x \cdot \cos C$.

$\frac{25}{6} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot x \cdot \frac{4}{5}$

$= \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}x$.

$25 = 9x + 4x$.

$13x = 25$

$x = \frac{25}{13}$

$\therefore CQ = \frac{25}{13}$ //