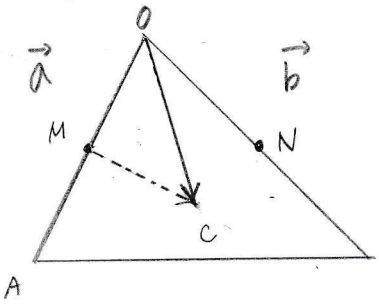
2年生「進研模試」1月・2020年 解説

B6 ベクトル（40点）

OA=2，OB=3，∠AOB=60°の△OABがあり，辺OAの中点をM，辺OBの中点をNとする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とし，$\overrightarrow{OC}=s\vec{a}+t\vec{b}$となるような点Cを取る。ただし，s，tは実数である。

(1) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$の値を求めよ。また$\overrightarrow{MC}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，s，tを用いて表せ。（12点）

<解説・解答>



内積

$\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

※θは$\vec{a}$，$\vec{b}$とのなす角とする。

まず内積から求めよう

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB$

$=2\cdot3\cdot\cos60^\circ$

$=2\cdot3\cdot\frac{1}{2}$

$=3$

次に$\overrightarrow{MC}$を求めよう。

終点－始点

$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}$

$=s\vec{a}+t\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$

$=(s-\frac{1}{2})\vec{a}+t\vec{b}$

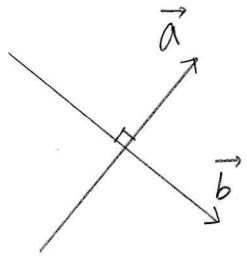
（答）$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$\overrightarrow{MC}=(s-\frac{1}{2})\vec{a}+t\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{MC}$かつ$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{NC}$であるとき，s，tの値を求めよ。（14点）

<解説・解答>

ベクトルの垂直条件



$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}$

※垂直のときは内積=0と覚えよう！

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{MC}=(s-\frac{1}{2})\vec{a}+t\vec{b}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0}$より

$\vec{a}\cdot\{(s-\frac{1}{2})\vec{a}+t\vec{b}\}=0$

$(s-\frac{1}{2})|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

$(s-\frac{1}{2})\times4+t\times3=0$

$4s-2+3t=0$

$4s+3t=2$ …①

次に$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{NC}$を立式しよう

$\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{ON}$

$=s\vec{a}+t\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$= s\vec{a} + (t - \frac{1}{2})\vec{b}$

$\vec{OB} \cdot \vec{NC} = \vec{0}$ より

$\vec{b}\{s\vec{a} + (t - \frac{1}{2})\vec{b}\} = 0$

$s\vec{a}\cdot\vec{b} + (t - \frac{1}{2})|\vec{b}|^2 = 0$

$3s + 9(t - \frac{1}{2}) = 0$

$3s + 9t - \frac{9}{2} = 0$

$6s + 18t - 9 = 0$

$2s + 6t = 3$ …②

②×2 − ①

$$\begin{array}{rl} & 4s + 12t = 6 \\ -) & 4s + 3t = 2 \\ \hline & 9t = 4 \end{array}$$

$t = \frac{4}{9}$

①に代入

$4s + 3 \cdot \frac{4}{9} = 2$

$4s + \frac{4}{3} = 2$

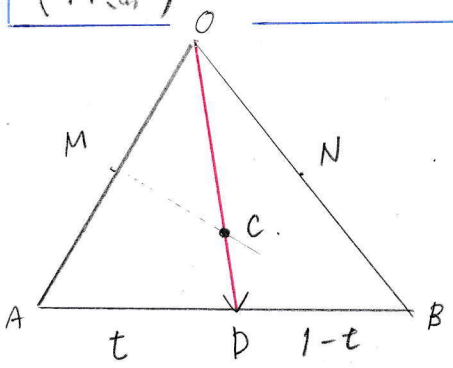
$4s = \frac{2}{3}$

$s = \frac{1}{6}$

(答) $s = \frac{1}{6}$, $t = \frac{4}{9}$

(3)

(2)で定めた点Cに対して、直線OCと直線ABの交点をDとするとき、$\vec{OD}$を、$\vec{a}$、$\vec{b}$を用いて表せ。またΔACDの面積を求めよ。(14点)



$\vec{OD}$を求めたい。次のやり方に着目しよう!

ベクトルの解法 ← 鉄板!

ベクトルを2通りに表して、係数の比較!

point ① point ②

[1] $\vec{OD} = k\vec{OC}$ とおく

[2] $AD : DB = t : 1-t$ $(0 < t < 1)$ とおいて、$\vec{OD}$を表す

上記の2通りで表し、ベクトルについている係数を比較して、kとtを求める!

結構、カンタンだぞ! 極めれば、ベクトルは無双化できるので、根気よくできるようになるまでTRYしよう!

[1] $\vec{OD} = k\vec{OC}$

(2)より $\vec{OC} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{OD} = k\left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}\right)$

$= \frac{1}{6}k\vec{a} + \frac{4}{9}k\vec{b}$ … [1]

[2] AD : DB = $t : 1-t$ とおく

$\overrightarrow{OD} = \dfrac{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}}{t + 1 - t}$

$= (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ … [2]

[1], [2] より、また $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$ であるから
それぞれの係数を比較し…

$$\begin{cases} \frac{1}{6}k = 1 - t & \cdots [1]' \\ \frac{4}{9}k = t & \cdots [2]' \end{cases}$$

[2]' を [1]' に代入して…

$\frac{1}{6}k = 1 - \frac{4}{9}k$

$3k = 18 - 8k$

$11k = 18$

$k = \frac{18}{11}$

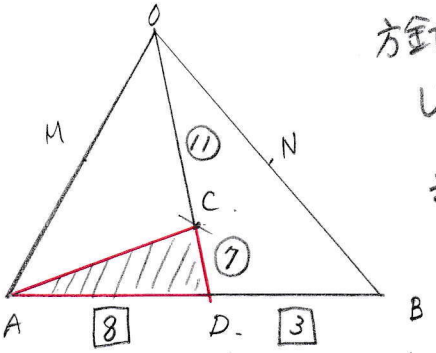
また、$t = \frac{4}{9}k$ より

$= \frac{4}{9} \cdot \frac{18}{11}$

$= \frac{8}{11}$

$\therefore \overrightarrow{OD} = \frac{3}{11}\vec{a} + \frac{8}{11}\vec{b}$

次に △ACD の面積を求めよう。



方針について
じっくり語ろう！

まず △OAB の
面積を求める

そして、△ACD は △OAB の面積を縮少して求めていく。

なぜなら、$\overrightarrow{OD}$ を求めた際に、以下の2つの辺の比が理解できた！

(a) OC : CD
(b) AD : DB

(a) から 高さの縮尺が、(b) から底辺の縮尺が導ける！

それらをそれぞれ △OAB の面積にかけることで △ACD の面積を求められるのだ！

では、まず辺の比から求めていこう！

(a) OC : CD

$\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OC}$　$k = \frac{18}{11}$ より

$\overrightarrow{OD} = \frac{18}{11}\overrightarrow{OC}$ ← これより…

$\therefore \overrightarrow{OC} = \frac{11}{18}\overrightarrow{OD}$ ← こっちの方がわかりやすいかな

したがって OC : CD = 11 : 7 となる

高さの比は OD : CD であり、18 : 7 になる。

つまり、△ACDの高さは、△OABの高さの $\frac{7}{18}$ 倍である。… (a)′

(b) AD : DB = $t : 1-t$ より、

$$= \frac{8}{11} : \frac{3}{11}$$

$$= 8 : 3$$ である。

底辺の比は AB : AD = 11 : 8 である。

したがって、△ACDの底辺は△OABの底辺の $\frac{8}{11}$ 倍である。… (b)′

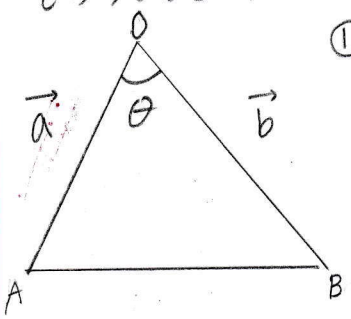
次に△OABの面積を求めよう。

求め方は

① ベクトルの面積公式

② 三角比の面積公式

どちらでもよい



① ベクトルの面積公式

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

② 三角比の面積公式

$$S = \frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$$

よく、「①を覚えた方がよいか」と質問されるが、正直②があれば、こと足りる。ボクは暗記していない。覚えてなくて困ったことは、ほとんどなかった、自己判断でおまかせします

一応ここはベクトルの分野なので、①で解いておきます。

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 9 - 9}$$

$|\vec{a}| = 2$ $|\vec{b}| = 3$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{36-9}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{27} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

△ACDは△OABの…

(a)′ 高さは $\frac{7}{18}$ 倍

(b)′ 底辺は $\frac{8}{11}$ 倍

であるから…

$$S_{\triangle ACD} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \times \frac{7}{18} \times \frac{8}{11}$$

$$= \frac{\cancel{3}^{1} \cdot 7 \cdot \cancel{8}^{\times 2}}{\cancel{2}_{1} \cdot \cancel{18}_{\cancel{9}\,3} \cdot 11}\sqrt{3}$$

$$= \frac{14}{33}\sqrt{3}$$

答. $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{11}\vec{a} + \frac{8}{11}\vec{b}$

面積 $\frac{14}{33}\sqrt{3}$