2年「共通テスト早期対策模試」2020年
数学ⅡB 第3問「数列」(20点)

太郎さんと先生は数列について話している。

先生：今日は、初項が3で末項が192である数列の一般項と、初項から末項までの和Sについて考えてみましょう。いろいろな数列が考えられます。ただし、その数列$\{a_n\}$の一般項は数式で表せるものとします。

太郎：次のような数列$\{a_n\}$を考えてみました。

〈太郎さんの考え〉

$(192-3)\div 9=21$ より

$a_n=3+(n-1)\times 21$

$=21n-18$

先生：太郎さん、この考えを説明してください。

太郎：はい。数列$\{a_n\}$を $\boxed{ア}$ と考えました。

初項が3なので、第 $\boxed{イウ}$ 項を192と考えると $\boxed{エ}$ は21になります。したがって一般項は $a_n=21n-18$ と表せます。

先生：そうですね。では、このときの和Sはいくらになるでしょうか。

太郎：$S=$ $\boxed{オカキ}$ です。

先生：(ア)がよく理解できていますね。

(1) (ア)，(エ)に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを選んでもよい。

① 等差数列 ① 等比数列 ② 公差 ③ 公比

また、(イ)(ウ)，(オ)(カ)(キ)に当てはまる数を求めよ。

〈解説・解答〉

太郎さんの考えに沿って、考えていこう

(ア)について…

〈太郎さんの考え〉の中で、「$a_n=3+(n-1)\times 21$」という数式を用いている。これは「等差数列の一般項の公式」である。

等差数列の一般項の公式

初項$a$、公差$d$、項数$n$の等差数列$\{a_n\}$の一般項は…

$$a_n=a+(n-1)\times d$$

このことから太郎さんは、この数列が「等差数列である」と認識したことがわかる。

次に(1)～(エ)を考えよう

初項が3、末項が192だから、その差が数列になっていると考えられる

$192-3=189$

そして 189を素因数分解してみよう

$$\begin{array}{r|l} 3 & 189 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$189 = 3^3 \cdot 7$ である。

189の約数は…

(1, 3, 7, 9, 21, 27, 63, 189)

である。この中の数字であれば、どれでも公差 $d$ とすることができる。

太郎さんは「21」を選んだようだ

そして $189 \div 21 = 9$

$\therefore (192-3) \div 9 = 21 = d$

これで等差数列の一般項の公式に当てはめると…

$$a_n = 3 + (n-1) \times 21$$
$$= 21n - 18$$

と求めることができる。

(イ)(ウ)は $a_n = 192$ のときの $n$ の値である

$$192 = 21n - 18$$
$$n = 10$$

最後に $S$ を求めよう

**等差数列の和の公式**

初項 $a$、公差 $d$、末項 $l$、項数 $n$ の等差数列 $\{a_n\}$ の和 $S$

① $S = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1) \times d\}$

② $S = \frac{1}{2}n(a + l)$

今回は末項までわかっているのでどちらも使えるね！

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \{2 \cdot 3 + (10-1) \cdot 21\}$$
$$= 5(6 + 9 \cdot 21)$$
$$= 5(6 + 189)$$
$$= 5 \cdot 195$$
$$= 975$$

$$\left( \begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 10(3 + 192) \\ &= 5 \cdot 195 \\ &= 975 \end{aligned} \right)$$

[答] (ア) ①（等差数列）
(イ)(ウ) 10
(エ) ②（公差）
(オ)(カ)(キ) 975

先生はさらに二つの［問題A］［問題B］を太郎さんに出題した。

次は、その［問題A］、［問題B］と太郎さんの解答である。

［問題A］初項が3で末項が192である数列 $\{a_n\}$ を等差数列と考えたとき、公差が

自然数であるとすると、公差は全部で何通り考えられるか。ただし、二つの項からなる数列も等差数列と考える。

[太郎さんの問題Aの解答]

この等差数列の公差を $d$ とおく

第 $m$ 項が 192 だとすると $3+(\boxed{ク})d=192$

よって $m$ が 2 以上の自然数であり、$d$ が自然数であることにより、$d$ は、

$\boxed{ケコサ}$ の正の約数であり、逆も成り立つ。

したがって、$d$ は全部で $\boxed{シ}$ 通り考えられる。

[問題B] 初項が3で末項が192である数列 $\{a_n\}$ を等比数列と考えたとき、公比が負の整数であるとすると、公比は全部で何通りあると考えられるか。ただし、二つの項からなる数列も等比数列と考える。

[太郎さんの問題Bの解答]

この等比数列の公比を $r$ とおく。

第 $m$ 項が 192 だとすると、$3\times r^{\boxed{ス}}=192$

よって、$m$ が 2 以上の自然数であり、$r$ が負の整数であることにより、$r$ は全部で $\boxed{セ}$ 通り考えられる。

(2) (ク)、(ス)に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを選んでもよい。

① $m-3$ ① $m-2$ ② $m-1$ ③ $m+1$ ④ $m+2$ ⑤ $m+3$

また、(ケ)(コ)(サ)、(シ)、(セ)に当てはまる数を求めよ。

<解説・解答>

(ク)について、

等差数列の一般項の公式である。これについては(1)を参照してほしい

$$a_n=3+(m-1)d=192$$

$$(m-1)d=189 \quad \cdots ①$$

このことと、問題文より

$$\left.\begin{array}{l}\cdot\ m\text{は2以上の自然数である}\\ \cdot\ d\text{が自然数である}\\ \cdot\ d\text{は189の正の約数}\end{array}\right\}\cdots ②$$

である、とわかる。

「逆も成り立つ」とは、

② ならば ① も成り立つ ということだ。

189の正の約数は…

$189=3^3\cdot 7$ より

$$(3+1)\times(1+1)=4\times 2=8.$$

よって、8通りである。

正の約数の個数

$N=a^p\cdot b^q\cdot c^r$ である数の正の約数の個数

$(p+1)(q+1)(r+1)$ 個

次に（ス）について考えよう。

等比数列の一般項の公式

初項 $a$、公比 $r$、項数 $n$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は…

$$a_n = a \cdot r^{n-1}$$

$$a_n = 3 \cdot r^{m-1} = 192$$

$$r^{m-1} = 64$$

$$r^{m-1} = 2^6$$

2|64
2|32
2|16
2|8
2|4
2

$r^{m-1}$ は「$2^6$」「$4^3$」「$8^2$」の3通りが考えられよう。

［答］（ク）② $(m-1)$

（ケ）（コ）（サ）189

（シ）8

（ス）② $(m-1)$

（セ）3

先生：では最後の問題です。［問題A］で考えた（シ）通りの等差数列について、初項から末項までの和 $S$ が最大のものを $S_1$、［問題B］で考えた（セ）通りの等比数列について、初項から末項までの和 $S$ が最大のものを $S_2$ とします。$S_1$ と $S_2$ はどちらが大きいですか。

太郎：$S_1 =$ $\boxed{ソタチツテ}$、$S_2 = 171$ となるので $S_1 > S_2$ となります

先生：よくできました。

(3) （ソタチツテ）に当てはまる数を求めよ。

＜解説・解答＞

$S_1$ が最大になるときを考えよう。

等差数列の和の一般項①より

$$S = \frac{1}{2}m\{2a + (m-1)d\}$$

$a=3$ のみわかっている。

$$= \frac{1}{2}m\{6 + (m-1)d\}$$

これを簡単にすると…

$$= 3m + \frac{md}{2}(m-1)$$

と変形できる。

ここで $(m-1)d = 189$ であるから、

$$S = (m-1)d \cdot \frac{m}{2} + 3m$$

$$= 189 \cdot \frac{m}{2} + 3m$$

と変形できてしまうぞ！

ここで $(m-1)d = 189$ より

「$m-1$」と「$d$」は189の正の約数である。

$m-1 = (1, 3, 7, 9, 21, 27, 63, 189)$

$m = (2, 4, 8, 10, 22, 28, 64, 190)$

そして、$S = 189 \cdot \frac{m}{2} + 3m$ と一次関数であるから、単調増加。

したがって、$S$ は $m$ が最大のときに最大となることがわかる。

$m = 190$ のときである。

$$S = \frac{189}{2} \cdot 190 + 3 \cdot 190$$

$$= 189 \cdot 95 + 570$$

$$= 17955 + 570$$

$$= 18525.$$

[答] (ソウチッテ) 18525