2年「5月・全統記述模試」2018年 過去問

3 (必須問題)「2次関数」(50点)

(目安・20分)

aを0でない実数の定数とする。2つのxの2次関数

$$f(x)=x^2-2ax+3a+4$$
$$g(x)=ax^2-2ax+a^2$$

がある。

$0\leqq x\leqq 3$における$f(x)$の最小値をm_1,

$0\leqq x\leqq 3$における$g(x)$の最小値をm_2,

とする。

(1) 放物線$y=f(x)$の頂点Aの座標と放物線$y=g(x)$の頂点Bの座標をaを用いて表せ。<8点>

<解説・解答>

$$y=f(x)=x^2-2ax+3a+4$$
$$=(x^2-2ax)+3a+4$$
$$=(x^2-2ax+a^2-a^2)+3a+4$$
$$=(x^2-2ax+a^2)-a^2+3a+4$$
$$=(x-a)^2-a^2+3a+4$$

$\therefore A(a,\ -a^2+3a+4)$

$$y=g(x)=ax^2-2ax+a^2$$
$$=a(x^2-2x)+a^2$$

忘れない!注意!!

$$=a(x^2-2x+1-1)+a^2$$
$$=a(x^2-2x+1)-a+a^2$$
$$=a(x-1)^2+a^2-a$$

$\therefore B(1,\ a^2-a)$

[答] A$(a,\ -a^2+3a+4)$

B$(1,\ a^2-a)$

(2) $a=-1$のとき, m_1, m_2の値を求めよ。<12点>

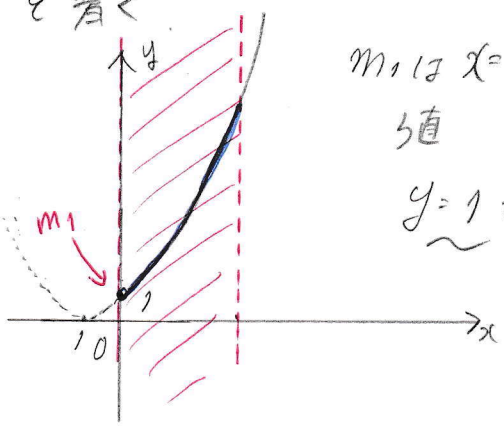
$-1-3+4$

$a=-1$をそれぞれ代入しよう

$1+1$

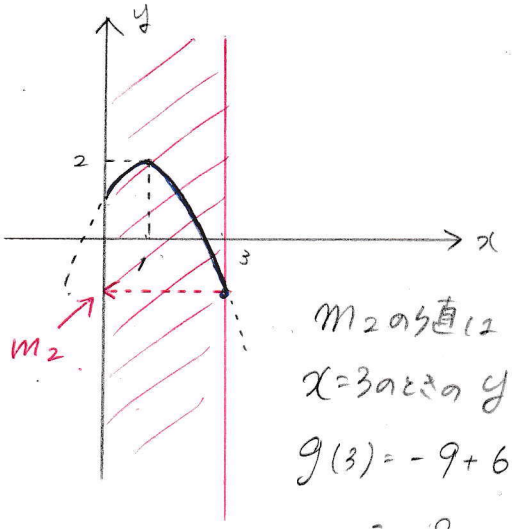
$$f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$$
$$g(x)=-x^2+2x+1=-(x-1)^2+2$$

$0\leqq x\leqq 3$を考慮して, それぞれグラフを書く



m_1は$x=0$のときの値

$y=1$である



m_2の値は
$x=3$のときのyの値
$g(3)=-9+6+1$
$=-2$

∴ [答] $m_1=1$, $m_2=-2$.

(3) m_2をaを用いて表せ <14点>

<解説・解答>

m_2は$g(x)$の最小値である.

$g(x)=a(x-1)^2+a^2-a$

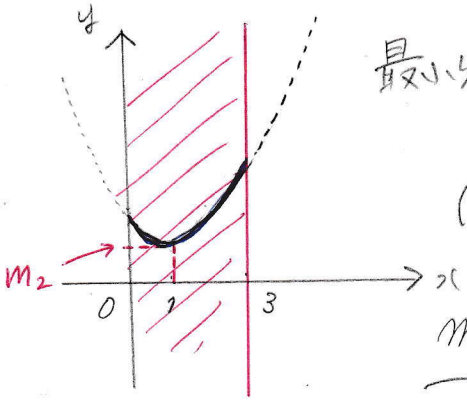
ここにaがついているから.

$a>0$ のとき 下に凸
$a<0$ のとき 上に凸

※ $a\neq0$である
(問題文より)

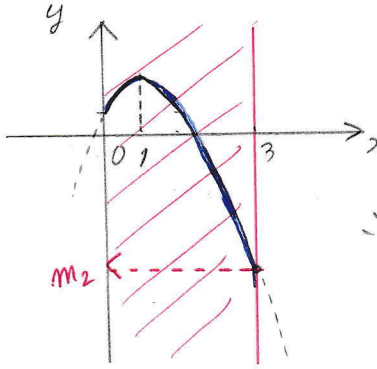
このちがいにより
最小値が異なってくる.
⇓
場合分け!

[1] $a>0$のとき
⇒グラフは下に凸



最小値は頂点の
y座標
$(1,\ a^2-a)$より
$m_2=a^2-a$

(2) $a<0$のとき
⇒グラフは上に凸



このときの最小値は
$x=3$のときのyの値
∴ $m_2=g(3)$
$=9a-6a+a^2$
$=a^2+3a$

[答] $\begin{cases} a>0\text{のとき } a^2-a \\ a<0\text{のとき } a^2+3a \end{cases}$

(4) $m_1=m_2$となるaの値を求めよ。
<16点>

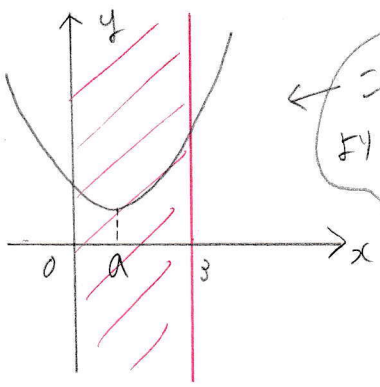
<解説・解答>

(3)より. m_2は $\begin{cases} a>0 \\ a<0 \end{cases}$ で最小値が分かれることが分かった.

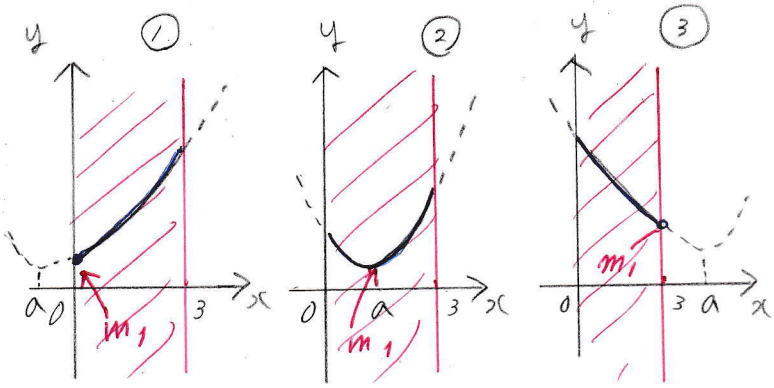
次に. m_1はどうだろうか.

$y=f(x)=(x-a)^2-a^2+3a+4$

$(a,\ -a^2+3a+4)$



これはaの範囲により最小値が3パターンに別れることがわかる



$a<0$ のとき　　$0<a\leqq 3$ のとき　　$3<a$ のとき

※ $a\neq 0$ である

上図のように、
軸の方程式 $x=a$ が…

① 定義域 $(0\leqq x\leqq 3)$ より左側 … $a<0$

② 定義域内にある … $0<a\leqq 3$

③ 定義域より右側 … $3<a$

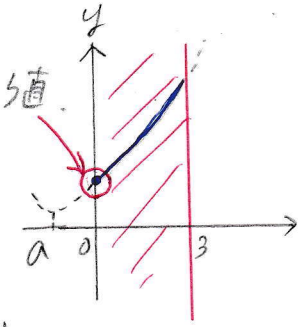
で別れる

ではやってみよう

① $a<0$ のとき

m_1 は $x=0$ のときの y の値

$m_1=f(0)=3a+4$

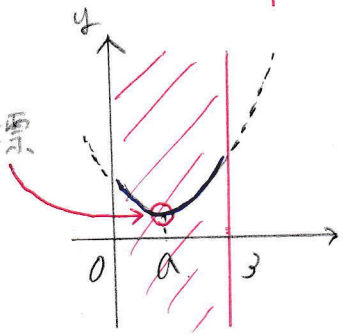


② $0<a\leqq 3$ のとき

m_1 は頂点の y 座標

$m_1=f(a)=$

$-a^2+3a+4$

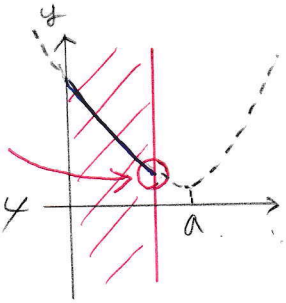


③ $3<a$ のとき

m_1 は $x=3$ のときの y の値

$\therefore m_1=f(3)=9-6a+3a+4$

$=-3a+13$



これで全ての条件が出揃った。③

計算しやすいように表にまとめてみよう

a	…	0 …	3 …
m_1	$3a+4$	$-a^2+3a+4$	$-3a+13$
m_2	a^2+3a	a^2-a	

↑表の見方はわかるかな!?
動画で詳しく解説してます!

表より [1] $a<0$, [2] $0<a\leqq 3$, [3] $3<a$ の3つに分けて解けばよいのがわかるよね。

[1] $a<0$ のとき

$m_1=m_2$ より

$3a+4=a^2+3a$

$a^2-4=0$

$(a+2)(a-2)=0$

$a=\pm 2$

$a<0$ だから … $a=-2$

必ず確認!

[2] $0<a\leqq 3$ のとき

$m_1=m_2$ より

$-a^2+3a+4=a^2-a$

$2a^2-4a-4=0$

$a^2-2a-2=0$

$a=1\pm\sqrt{1+2}$

$=1\pm\sqrt{3}$

$0 < a \leqq 3$ に該当するか確認する。

$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73$

$1+\sqrt{3} \fallingdotseq 2.73$ ○

$1-\sqrt{3} \fallingdotseq -0.73$ ×

$\therefore a = 1+\sqrt{3}$

[3] $3 < a$ のとき

$m_1 = m_2$ より

$-3a+13 = a^2-a$

$a^2+2a-13=0$

$a = -1 \pm \sqrt{1+13}$

$= -1 \pm \sqrt{14}$

$3 < a$ に該当するか確認する

平方根の概数の出し方

① $3 < \sqrt{14} < 4$

② $3-1 < -1+\sqrt{14} < 4-1$

③ $2 < -1+\sqrt{14} < 3$

※ $3 < a$ に該当せず

④ $-4 < -\sqrt{14} < -3$

⑤ $-4-1 < -1-\sqrt{14} < -3-1$

⑥ $-5 < -1-\sqrt{14} < -4$

※ 該当せず

[1]〜[3]より 条件を満たす a の値は

-2 と $1+\sqrt{3}$

[答] $a = -2,\ 1+\sqrt{3}$