3年「5月・全統模試」2020年・過去問

Ⅲ型（数ⅠAⅡBⅢ）$\boxed{1}$（必須問題）

「小問集合」（配点40点，目安15分）

(1) $\sum_{k=1}^{n} k(k+2)$ を用いて表せ。

<8点> Level.1

<解説・解答>

シグマ記号の基本（a, bは定数）

・$\sum_{k=1}^{n}(ak+b) = a\sum_{k=1}^{n} k + b\sum_{k=1}^{n} 1$

・$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

・$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

$$(与式) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+6)$$

①

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$$

[答] $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

(2) 連立不等式

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \leqq 0 & \cdots ① \\ |x-3| \leqq 2 & \cdots ② \end{cases}$$

を解け。 <8点> Level.1

<解説・解答>

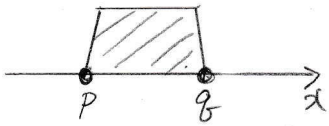
①, ② の不等式をともに満たす x の範囲を求める。

① $x^2 - x - 12 \leqq 0$

$(x-4)(x+3) \leqq 0$

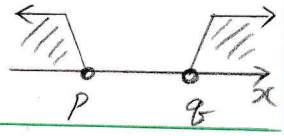
Ⓐ $(x-p)(x-q) \leqq 0$ のとき $(p<q)$

→ $p \leqq x \leqq q$



Ⓑ $(x-p)(x-q)$ 0のとき

→ $x \leqq p,\ q \leqq x$



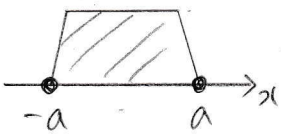
$\therefore -3 \leqq x \leqq 4 \cdots ①'$

② $|x-3| \leqq 2$

絶対値不等式の解き方〈簡易版〉

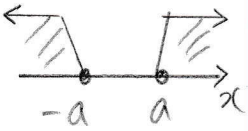
㋐ $|x| \leqq a$

→ $-a \leqq x \leqq a$



㋑ $|x| \geqq a$

→ $x \leqq -a,\ a \leqq x$



$-2 \leqq x-3 \leqq 2$

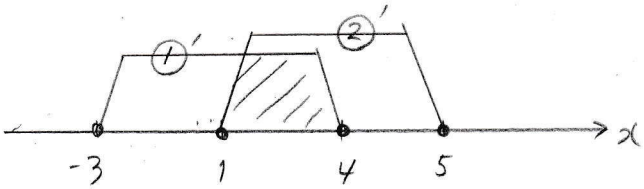
※ 辺々に3を加える

$-2+3 \leqq x-3+3 \leqq 2+3$

$1 \leqq x \leqq 5$ …②′

①′ $-3 \leqq x \leqq 4$　②′ $1 \leqq x \leqq 5$

ともに満たす x の値の範囲は…



$1 \leqq x \leqq 4$

[答]　$1 \leqq x \leqq 4$

(3) 不等式 $\cos 2\theta + 2\cos\theta + 1 \geqq 0$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を解け。〈8点〉 Level 3

〈解説・解答〉

$\cos 2\theta \to \cos\theta$ に変形しよう

"2倍角の公式"を利用する。

2倍角の公式

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

※ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を代入すると次の式が得られる

$= 2\cos^2\theta - 1$

$= 1 - 2\sin^2\theta$

∴ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$2\cos^2\theta - 1 + 2\cos\theta + 1 \geqq 0$

$2\cos^2\theta + 2\cos\theta \geqq 0$

$\cos^2\theta + \cos\theta \geqq 0$

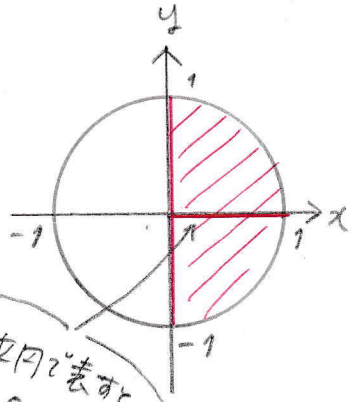
$\cos\theta(\cos\theta + 1) \geqq 0$

$\cos\theta$ は0になる可能性があるから割ることができない

① $\begin{cases} \cos\theta \geqq 0 \\ \cos\theta + 1 \geqq 0 \end{cases}$ または ② $\begin{cases} \cos\theta \leqq 0 \\ \cos\theta + 1 \leqq 0 \end{cases}$

① $\begin{cases} \cos\theta \geqq 0 & \cdots ⓐ \\ \cos\theta + 1 \geqq 0 & \cdots ⓑ \end{cases}$ ← これらをともに満たすθの範囲を求める。

ⓐ $\cos\theta \geqq 0$



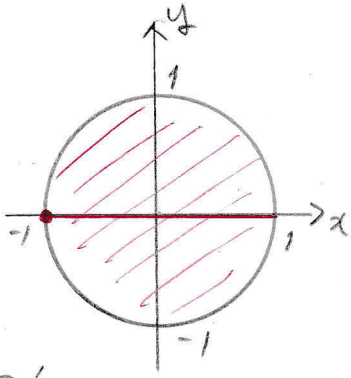
単位円で表すと $\cos\theta$ の値は x 軸に表れる

$\cos\theta \geqq 0$ となるθの範囲は…

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi \leqq \theta < 2\pi$ … ⓐ′

ⓑ $\cos\theta + 1 \geqq 0$

$\cos\theta \geqq -1$



$\cos\theta \geqq -1$ を満たすθの範囲は…

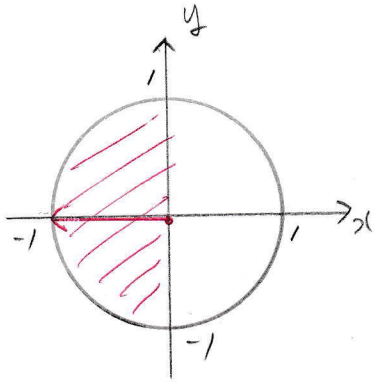
$0 \leqq \theta < 2\pi$ … ⓑ′

ⓐ′ⓑ′をともに満たすθの範囲は…

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi \leqq \theta < 2\pi$ … ①′

② $\begin{cases} \cos\theta \leqq \theta & \cdots ⓒ \\ \cos\theta + 1 \leqq \theta & \cdots ⓓ \end{cases}$

ⓒ $\cos\theta \leqq 0$

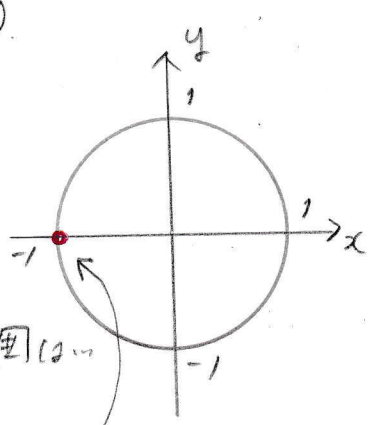


$\cos\theta < 0$ を満たすθの値の範囲は…

$\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi$ … ⓒ′

ⓓ $\cos\theta + 1 \leqq 0$

$\cos\theta \leqq -1$



$\cos\theta \leqq -1$ を満たすθの値の範囲は…

$\theta = \pi$ のみ … ⓓ′

ⓒ′ⓓ′より、ともに満たすθの値の範囲は

$\theta = \pi$ … ②

①、②は与式の条件を満たしているから、

不等式の解は、

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$, $\frac{3}{2}\pi \leqq \theta < 2\pi$

[答] $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$

$\frac{3}{2}\pi \leqq \theta < 2\pi$

(4) xy平面上の3点$(2,0)$, $(6,0)$, $(3,3)$を通る円の方程式を求めよ。
<8点> Level. 1

<解説・解答>

円の方程式

① 一般型 ← 座標式入のとき

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

② 平方完成型 ← 円の中心の座標、半径が与えられたとき

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

中心(p,q) 半径rの円.

$(2,0)$, $(6,0)$, $(3,3)$を代入する

①より

$$\begin{cases} 4+0+2l+m\cdot 0+n=0 \\ 36+0+6l+m\cdot 0+n=0 \\ 9+9+3l+3m+n=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4l+n=-4 \\ 6l+n=-36 \\ 3l+3m+n=-18 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & 2l+n=-4 \\ -) & 6l+n=-36 \\ \hline & -4l \quad =32 \end{array}$$

④

$l=-8$

$-16+n=-4$

$n=12$

$-24+3m+12=-18$

$3m=-6$

$m=-2$

$x^2+y^2-8x-2y+12=0$

$x^2-8x+16+y^2-2y+1=-12+16+1$

$(x-4)^2+(y-1)^2=5$

[答] $(x-4)^2+(y-1)^2=5$

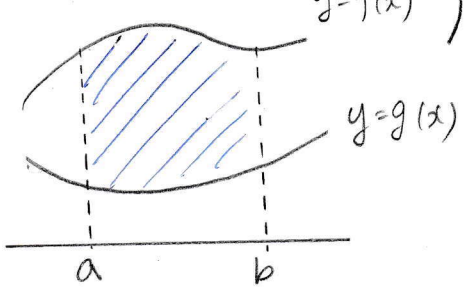
$x^2+y^2-8x-2y+12=0$ も可

(5) 曲線 $y=x^3-x^2-2x$ の $x\geqq 0$ の部分とx軸で囲まれた図形の面積を求めよ。<8点> Level. 2

<解説・解答>

座標平面上の2つの図形に囲まれた部分の面積

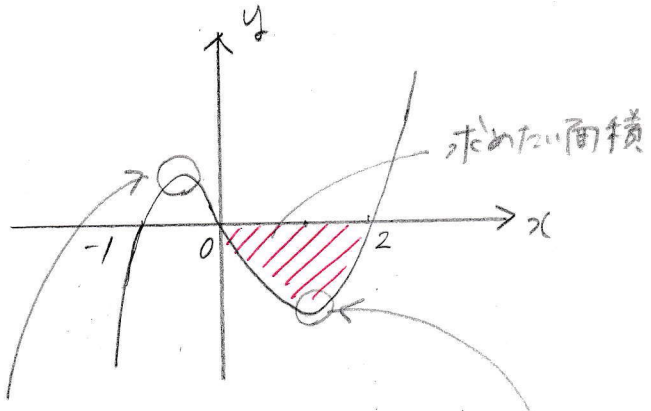
$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$



$y=f(x)=x^3-x^2-2x$ を図示しよう.

$f(x)=x(x^2-x-2)$

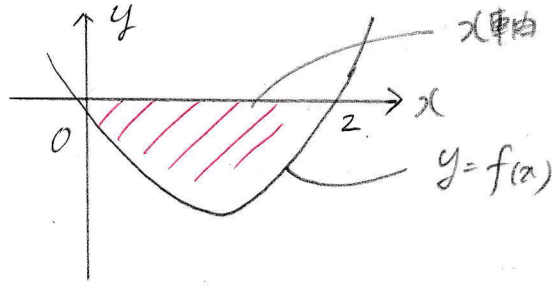
$=x(x-2)(x+1)$



$f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+1$

$=-\frac{3}{8}+1=\frac{5}{8}>0$

$f(1)=1-1-2=-3<0$



上の図形 … x軸 $y=0$

下の図形 … $y=f(x)$ $y=x^3-x^2-2x$

$\int_a^b$(上の図形)−(下の図形) dx

$=\int_0^2(0-x^3+x^2+2x)\,dx$

$=\int_0^2(-x^3+x^2+2x)\,dx$

⑤

$=-\int_0^2(x^3-x^2-2x)\,dx$

$=-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2$

$=-\left\{\frac{1}{4}(2^4-0^4)-\frac{1}{3}(2^3-0^3)-(2^2-0^2)\right\}$

$=-\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}-4\right)$

$=-\left(-\frac{8}{3}\right)$

$=\frac{8}{3}$

[答] $\frac{8}{3}$