3年「5月/全統模試」2020年
Ⅲ型（数ⅠAⅡBⅢ）3（必須問題）
「確率」（配点40点・目安25分）

Oを原点とする座標平面上に2点A(6,0), B(0,6)があり，座標平面上を動く点Pが初め原点にある。次の操作を6回繰り返し行う。

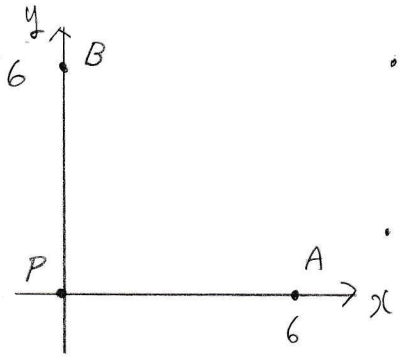
（操作）2枚の硬貨を投げ，表が2枚出れば，Pをx軸の正の向きに1だけ動かし，表と裏が1枚ずつ出ればPをy軸の正の向きに1だけ動かし，裏が2枚出ればPを動かさない。

（操作）を6回行った後のPの位置について次の問いに答えよ。

(1) Pが線分ABの中点にある確率を求めよ。〈6点〉

〈解説・解答〉

ルールの確認をしてみよう



・2回とも表が出る …事象Xとする

・表・裏が1回ずつ出る …事象Yとする

・2回とも裏が出る …事象Zとする

①

・事象X →
・事象Y ↑
・事象Z ×

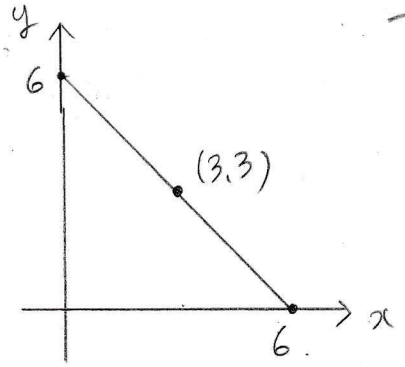
Pは確率を示す

表 — 表 … 事象X　$P(X)=\frac{1}{4}$

表 — 裏 } 事象Y　$P(Y)=\frac{1}{2}$

裏 — 表 }

裏 — 裏 … 事象Z　$P(Z)=\frac{1}{4}$



6回の試行でPが(3,3)にいるためには，(→)が3回，(↑)が3回の組み合わせで成り立っていればよい。

「反復試行」を利用しよう

P(X)が3回，P(Y)が3回，これらを並べかえればよい。

確率の並べかえ

$$\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

→ → → ↑ ↑ ↑ の並べかえ

$\frac{1}{4}$　$\frac{1}{2}$

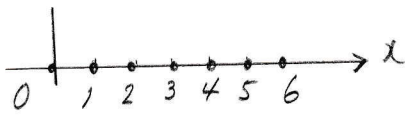
$$\frac{\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot2\cdot1}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}\cdot\frac{1}{\cancel{64}_{16}}\cdot\frac{1}{8}$$

$$=\frac{5}{128}$$

[答] $\frac{5}{128}$

(2) Pが線分OA(両端を含む)上にある確率を求めよ。<8点>

<解説・解答>



(0,0) (1,0) (2,0) (3,0) (4,0)
(5,0) (6,0) の 7通り

この7通りの全ての確率を出すのは面倒.

この7通りにPがあることは、次のように言いかえることができる.

「6回の試行が全て、XまたはZであること.」

重複順列の発想で

1回の試行の確率

$$X\text{または}Z=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

これが6回続くから,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$$

[答] $\frac{1}{64}$

<別解>

7通り全ての確率を出すやり方も解説しておく.

① (0,0)にある確率

事象Zが6回.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^6=\frac{1}{4096}$$

② (1,0)

Xが1回, Zが5回

$$\frac{6!}{1!5!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$=\frac{6}{4096}$$ ← 最後加えるから, 約分せずに…

③ (2,0)

Xが2回, Zが4回.

$$\frac{6!}{2!4!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$\frac{\cancel{6}^{3}\cdot5}{\cancel{2}\cdot1}=15$$

$$=\frac{15}{4096}$$

④ (3.0)

Xが3回、Zが3回

$$\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$\frac{\cancel{6}\cdot5\cdot4}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}$$

$$=\frac{20}{4096}$$

⑤ (4.0)

Xが4回, Zが2回

$$\frac{6!}{4!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$$ ← ③と同じ!

$$=\frac{15}{4096}$$

⑥ (5.0)

Xが5回, Zが1回

$$\frac{6!}{5!1!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)$$ ← ②と同じ

$$=\frac{6}{4096}$$

⑦ (6.0)

Xが6回

$$\left(\frac{1}{4}\right)^6$$

$$=\frac{1}{4096}$$

①〜⑦より

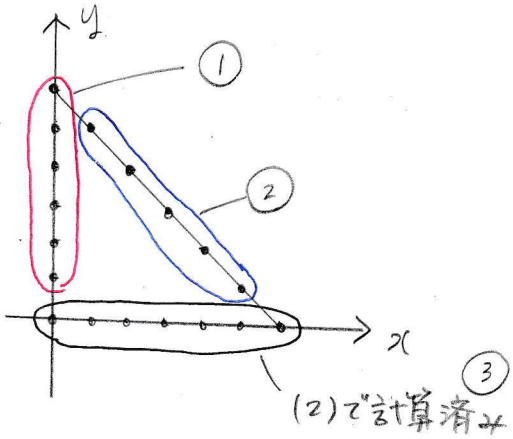
$$\frac{(1+6+15)\times2+20}{4096}$$

$$=\frac{64}{4096}$$

$$=\frac{1}{64}$$

(3) PがΔOABの周上にある確率を求めよ。<18点>

<解説・解答>



① (0.1) (0.2) (0.3) (0.4) (0.5) (0.6) の6通り

この6通りは

全6回の操作全てが

・輝Y(↑) または Z(×)

の組み合わせであること

ここで注意点が1点!

④

そこから(0,0)になる確率
=
全て事象Z(X)
を除く必要がある

・$P(Y)=\frac{1}{2}$, $P(Z)=\frac{1}{4}$

$P(Y\text{または}Z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{4}$

$\therefore \left(\frac{3}{4}\right)^6-\left(\frac{1}{4}\right)^6$

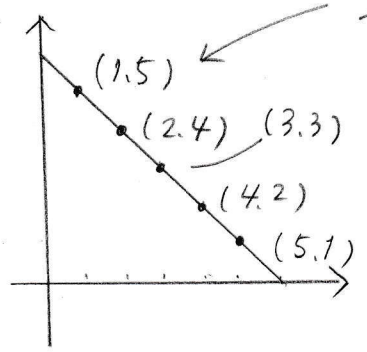
$=\frac{729}{4096}-\frac{1}{4096}$

$\begin{array}{r}81\\9\\\hline 729\end{array}$

$=\frac{728}{4096}$

$=\frac{91}{512}$ …①

②



この5点は
事象Xまたは
事象Yのみで
成立っている.

①と同様に,

・6回すべてが P(X) または P(Y) である確率

から,

・6回すべてが P(X) … (6,0)
・6回すべてが P(Y) … (0,6)

の確率を控除する.

・$P(X)+P(Y)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^6=\frac{729}{4096}$

・すべて P(X)

$\left(\frac{1}{4}\right)^6=\frac{1}{4096}$

・すべて P(Y)

$\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

$\frac{729}{4096}-\frac{1}{4096}-\frac{1}{64}$

$=\frac{729-1-64}{4096}$

$\begin{array}{r}64\\64\overline{)4096}\\384\\\hline 256\\256\\\hline 0\end{array}$

$=\frac{664}{4096}$

$= \frac{83}{512}$ …②

③ (2)より $\frac{1}{64}$

①〜③より

$\frac{91}{512} + \frac{83}{512} + \frac{1}{64}$

$= \frac{91+83+8}{512}$

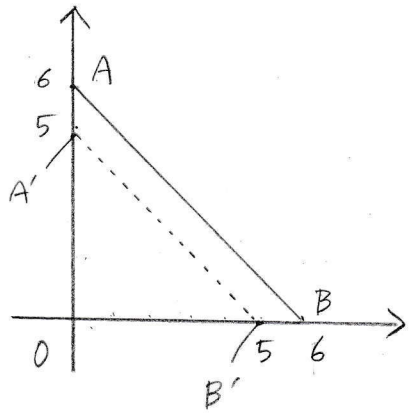
$= \frac{182}{512}$

$= \frac{91}{256}$

[答] $\frac{91}{256}$

(4) Pが三角形OABの内部にあり、かつ、三角形PABの面積が6以下である確率を求めよ。<14点>

<解説・解答>



[1] 直線A′B′上に点Pがあるとき

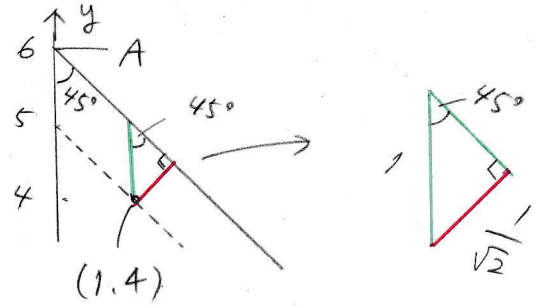
例)1 (5,0)

面積 $1 \times 6 \times \frac{1}{2}$ (BB′, OA)

$= 3$

※ただし、△OAB上の点は含まれない。

例)2 (1,4)



ABを底辺と考えよう

$AB = 6\sqrt{2}$

高さは上図より $\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴面積 $= 6\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$

$= 3$

このことよりA′B′上の点はすべて

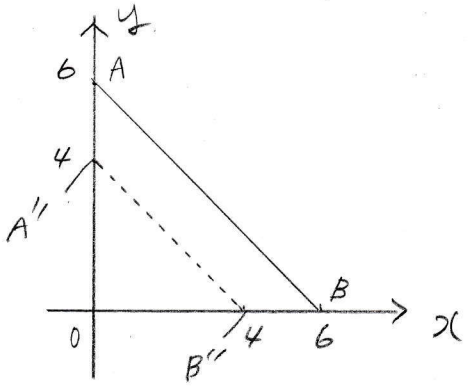
面積が3であることがわかる。

∴ A'B'上の点

~~(0,5)~~, (1,4) (2,3), (3,2) (4,1)

~~(5,0)~~ の4点

[2] 直線A''B''上の点



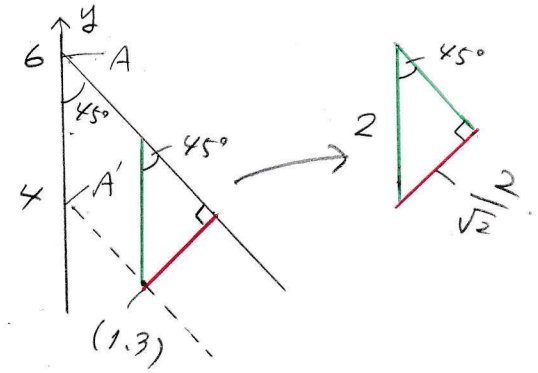
例)3. (4,0) のとき

面積 = 2 × 6 × $\frac{1}{2}$ (2 ← BB'', 6 ← OA)

= 6.

※ただし、△OAB上の点は含まれない。

例)4. (1,3) のとき



底辺 AB = $6\sqrt{2}$ 高さ = $\frac{2}{\sqrt{2}}$

面積 = $6\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$

= 6.

したがってA''B''上の点はすべて面積が6となる。

∴ A''B''上の点

~~(4,0)~~ (3,1) (2,2), (1,3)

~~(0,4)~~ の3点

[1]の計算

~~(0,5)~~, (1,4) (2,3) (3,2) (4,1) ~~(5,0)~~

→ (Zが1回, 「XまたはY」が5回)

− (Zが1回, Xが5回)

− (Zが1回, Yが5回)

① Zが1回, 「XまたはY」が5回.

$P(Z) = \frac{1}{4}$, $P(X \text{ or } Y) = \frac{3}{4}$.

$\frac{6!}{1!5!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$

$$= \frac{6 \cdot 243}{4096}$$

$$= \frac{1458}{4096}$$

$9 \cdot 9 \cdot 3$

$81 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} 243 \\ 6 \\ \hline 1458 \end{array}$$

② Zが1回，Xが5回

$$6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$= \frac{6}{4096}$$

③ Zが1回，Yが5回．

$$6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \qquad 2^7$$

$$= \frac{6}{128}$$

①〜③より

$$\frac{1458}{4096} - \frac{6}{4096} - \frac{6}{128}$$

$$= \frac{729 - 3 - 96}{2048}$$

$$= \frac{630}{2048}$$

[2]の計算

$(\cancel{4,0}).(3,1)\ (2,2)\ (1,3)\ (\cancel{0,4})$

→（Zが2回，「XまたはY」が4回）

−（Zが2回，Xが4回）

−（Zが2回，Yが4回）

① Zが2回，「XorY」が4回．

$$\frac{6!}{2!4!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$= {}_6C_2 \cdot \frac{81}{4096}$$

$$\frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot 1}$$

$$= \frac{1215}{4096}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 15 \\ \hline 405 \\ 81 \\ \hline 1215 \end{array}$$

② Zが2回，Xが4回．

$$\frac{6!}{2!4!} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$= \frac{15}{4096}$$

③ Zが2回，Yが4回．

$$\frac{6!}{2!4!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

2^8

$$= \frac{15}{256}$$

①〜③より

$$\frac{1215}{4096} - \frac{15}{4096} - \frac{15}{256}$$

$$= \frac{1215-15-240}{4096}$$

$$= \frac{960}{4096}$$

[1][2]より

$$\frac{630}{2048} + \frac{960}{4096}$$

$$= \frac{315+240}{1024}$$

$$= \frac{555}{1024}$$

//

[答] $\frac{555}{1024}$