[問題]

関数 $y=f(x)=-\cos 2x-a\sin x+2$ がある。

(1) $\sin x=t$ とおく。y を t を用いて表せ。また t の値の範囲を求めよ。<6点>

<解説・解答>

$\cos 2x$ を変形し，$\sin x$ で表そう

2倍角の公式

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$=2\cos^2 x-1$$
$$=1-\sin^2 x$$

$$y=-(1-2\sin^2 x)-a\sin x+2$$
$$=-1+2\sin^2 x-a\sin x+2$$
$$=2\sin^2 x-a\sin x+1$$
$$=2t^2-at+1$$

次に t の値の範囲を求めよう。

x に範囲の指定はないが，

$\sin x$ は周期関数であり

$$-1\leqq \sin x\leqq 1$$

である。したがって，

$$-1\leqq t\leqq 1$$

[答] $y=2t^2-at+1$

$-1\leqq t\leqq 1$

(2) $a>0$ とする。関数 $y=f(x)$ が常に $f(x)\geqq 0$ を満たすような a の値の範囲を求めよ。 <6点>

<解説・解答>

考え方

「2次関数」との融合問題

⇒ $y=f(x)$ を2次関数として考えると解きやすい

⇒ 平方完成して、グラフ化

⇒ (y の最小値 $\geqq 0$) とすればよい

$f(t)$ の形で計算すると解きやすいぞ!

$$f(t)=2t^2-at+1$$

$$=2\left(t^2-\frac{a}{2}t\right)+1$$

$$=2\left(t^2-\frac{a}{2}t+\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{8}\right)+1$$

$$=2\left(t-\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{4}+1$$

$$\left(\frac{a}{4},\ -\frac{a^2}{4}+1\right)$$

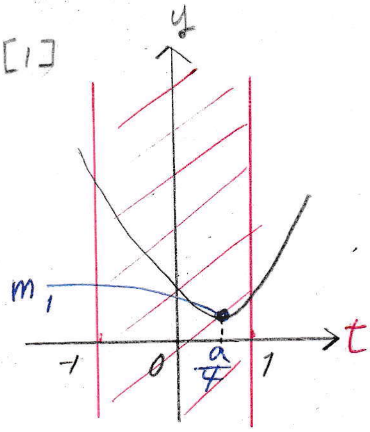
そして、(1)より $-1\leqq t\leqq 1$

これを忘れずに…!

(y の最小値) $\geqq 0$ にしたい。

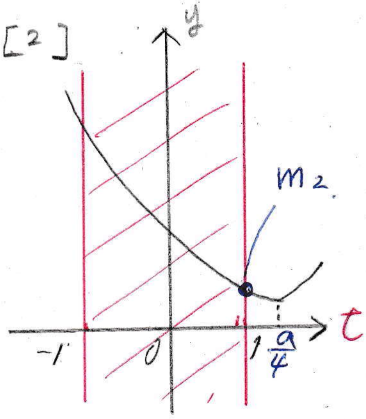
最小値が以下の2通り考えられる。

[1]



$0<\frac{a}{4}<1$ のとき

[2]



$\frac{a}{4}\geqq 1$ のとき

軸は $t=\frac{a}{4}$

a は $a>0$

これらを考慮して場合わけ!

したがって、最小値は次の2通り

[1] $0<\frac{a}{4}<1$ のとき

$t=\frac{a}{4}$ のとき

$$f\left(\frac{a}{4}\right)=-\frac{a^2}{4}+1$$

頂点

[2] $\frac{a}{4}\geqq 1$ のとき

$t=1$ のとき

$$f(1)=2\cdot 1^2-a\cdot 1+1$$

$$=-a+3$$

[1] $0<\frac{a}{4}<1$

$\Rightarrow$ $0<a<4$ のとき

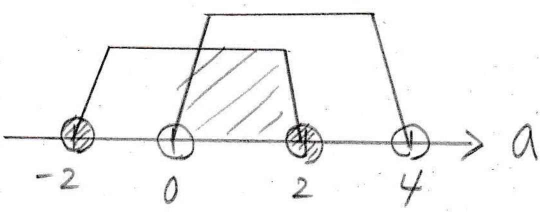
$$f\left(\frac{a}{4}\right)=-\frac{a^2}{4}+1\geqq 0$$

$$a^2-4\leqq 0$$

$$(a+2)(a-2)\leqq 0$$

$\therefore$ $-2\leqq a\leqq 2$

$0<a<4$ より



$\therefore$ $0<a\leqq 2$ …[1]

[2] $\frac{a}{4}\geqq 1$

$\Rightarrow$ $a\geqq 4$ のとき

$$f(1)=-a+3\geqq 0$$

$$a\leqq 3$$

$a\geqq 4$ より、この条件を満たす

aの範囲はない。

したがって、[1][2]より

$0<a\leqq 2$

[答] $0<a\leqq 2$

(3) $a=3$, $f(x)=0$ とする。$0 \leqq x < b$ の範囲内にxが実数解を2つだけ持つように、bの値の範囲を示せ〈8点〉

〈解説・解答〉

「$a=3$, $f(x)=0$」を代入してみよう

$$f(t)=2t^2-3t+1=0$$

2次方程式となった。

「実数解を2つ」と言っているので、とりあえず、この方程式を解いてみよう

$$(2t-1)(t-1)=0$$

$$t=\frac{1}{2},\ 1$$

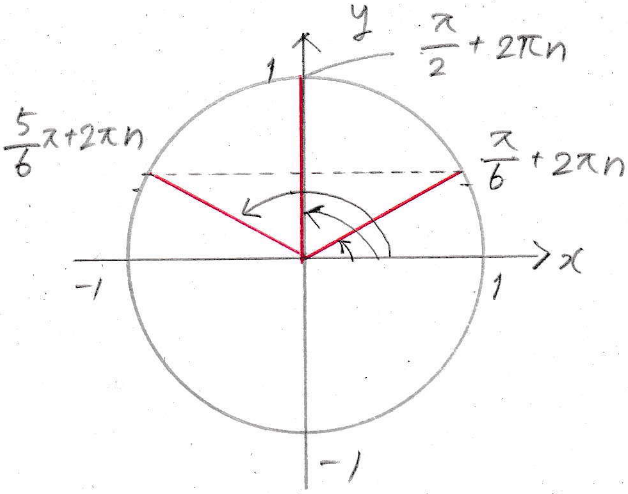
ここで $t=\sin x$ より

$$\sin x=\frac{1}{2},\ 1$$

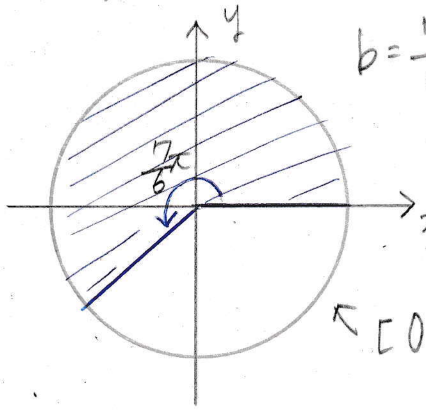
$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \frac{5}{6}\pi+2\pi n$$

の3つである。

$\sin x$は周期関数で、かつxに範囲指定($0 \leqq x < 2\pi$など)がないから…

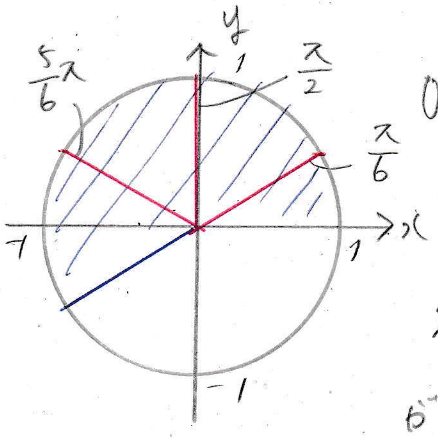


では「$0 \leqq x < b$ の範囲内にxが実数解を2つだけ持つ」とはどういうことだろうか。



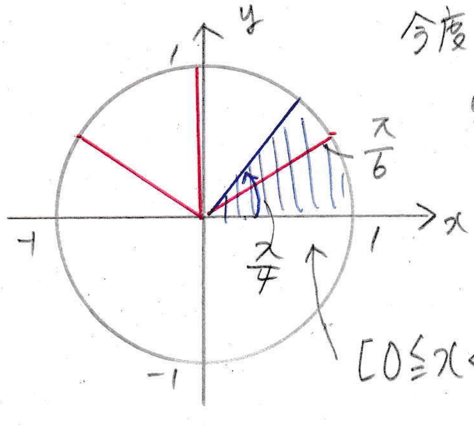
$b=\frac{7}{6}\pi$ としたとしよう

[$0 \leqq x < \frac{\pi}{6}$]の範囲



$0 \leqq x < \frac{\pi}{6}$ の範囲内であれば方程式の解 $x=\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi$ が3つとも含まれる!

では、$b=\frac{\pi}{4}$としよう

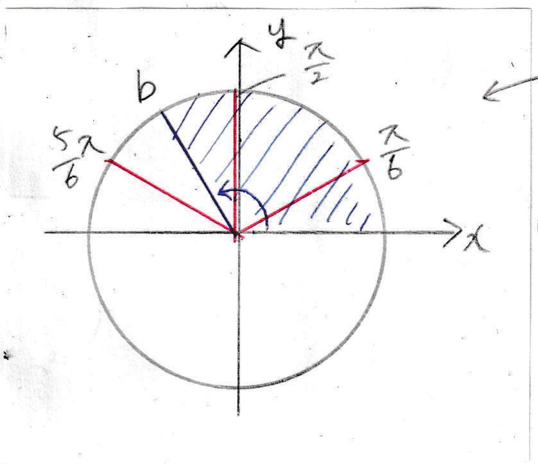


今度は、[$0 \leqq x < \frac{\pi}{4}$] となり、この範囲では $x=\frac{\pi}{6}$ の1つのみを含む

[$0 \leqq x < \frac{\pi}{4}$ の範囲]

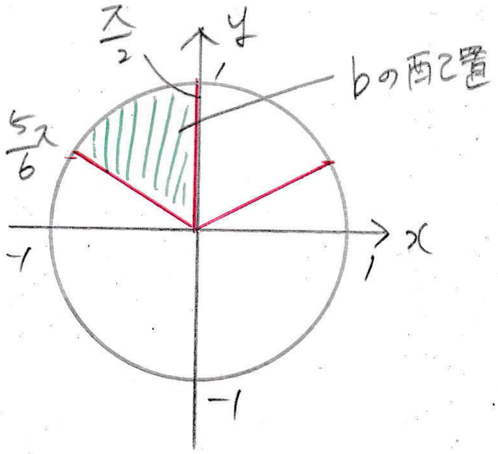
意味がわかったかな！？

したがって、［実数解が2つだけ含む］ためには…



このような位置関係になっていればよい！

したがって、bの配置を図示すると…



$\therefore\ \frac{\pi}{2} < b < \frac{5}{6}\pi$ となる！

最後にひと仕事！

$$\frac{\pi}{2} < b < \frac{5}{6}\pi$$

不等号の適切な表示を考えよう！（「<」か「≦」か）

「$0 \leqq x < b$ の範囲内に実数解が2つ」が条件である。

まとめ

- $\frac{\pi}{2} < b < \frac{5}{6}\pi$
- $x = \frac{\pi}{2}$ は含みたい
- $x = \frac{5}{6}\pi$ は含みたくない
- $0 \leqq x < b$ より "b" は含まない

これらを考慮すると…

$b = \frac{\pi}{2}$ は不適（$b = \frac{\pi}{2}$ であると、xの解に $\frac{\pi}{2}$ は含まれなくなってしまうから！）

$b = \frac{5}{6}\pi$ は適する（$b = \frac{5}{6}\pi$ であれば、xの解に $\frac{5}{6}\pi$ は含まれなくなるから）

$$\therefore\ \frac{\pi}{2} < b \leqq \frac{5}{6}\pi$$

［答］ $\frac{\pi}{2} < b \leqq \frac{5}{6}\pi$