

[問題]

$$y = (x^2 - 2|x|)^2 - 2(x^2 - 2|x|) + 3 \text{ がある,}$$

(1) $t = x^2 - 2|x|$ とおく。 t と x のグラフを書け。 また、 t の値の範囲を求めよ。 (16点)

<解説・解答>

“絶対値”を場合分けして開く

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0 \text{ とき}) \dots [1] \\ -x & (x < 0 \text{ とき}) \dots [2] \end{cases}$$

[1] $x \geq 0$ とき

$$t = x^2 - 2x$$

$$= (x-1)^2 - 1$$

頂点 (1, -1)

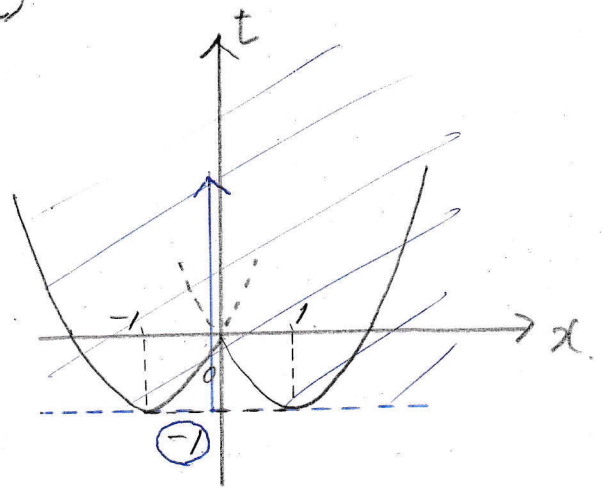
[2] $x < 0$ とき

$$t = x^2 + 2x$$

$$= (x+1)^2 - 1$$

頂点 (-1, -1)

①



t の値の範囲は...

グラフより $t \geq -1$

~~~~~”

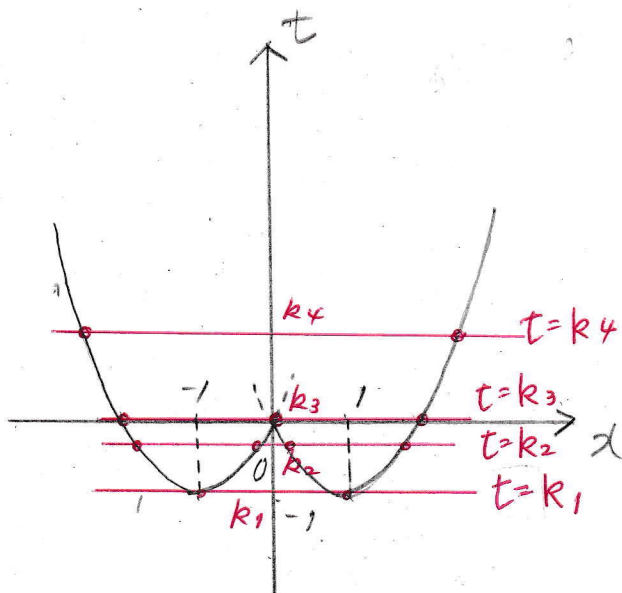
[答] グラフは [図]

$$t \geq -1$$

(2)  $t=k$  を満たす解の個数を  $k$  の範囲に応じて表せ。(14点)

<解説・解答>

$$t = x^2 - 2|x|$$



$t=k$  を満たす解の個数

||

$\begin{cases} t = x^2 - 2|x| \\ t = k \end{cases}$  の交点における  $x$  座標の個数

[1]  $k = -1$  ... 2個 ( $t=k_1$ )

[2]  $-1 < k < 0$  とき ... 4個 ( $t=k_2$ )

[3]  $k = 0$  とき ... 3個 ( $t=k_3$ )

[4]  $0 < k$  とき ... 2個 ( $t=k_4$ )

[答]  $k = -1$ ,  $0 < k$  とき 2個

$k = 0$  とき 3個

$-1 < k < 0$  とき 4個

(3)  $y=l$  を満たす解の個数がちょうど4個となるときの  $l$  の値の範囲を求めよ。(20点)

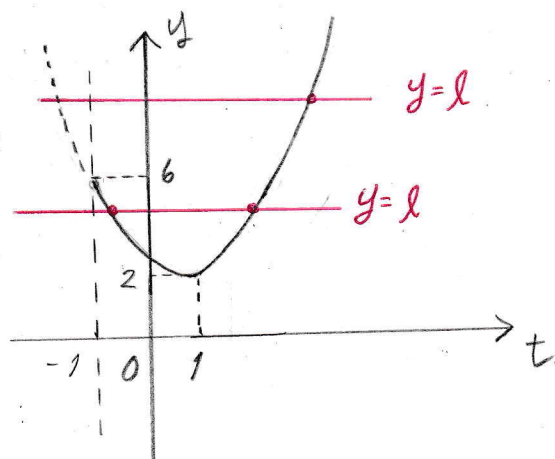
<解説・解答>

$$y = (x^2 - 2|x|)^2 - 2(x^2 - 2|x|) + 3$$

$$t = x^2 - 2|x| \text{ とおくと}$$

$$y = t^2 - 2t + 3$$

$$= (t-1)^2 + 2 \quad (t \geq -1)$$



$y$  と  $t$  のグラフに、 $y=l$  のグラフを走らせる。

2本のグラフの交点1つにつき、

$t$  の値が1つ決まる。

しかし、「解の個数」とは、 $t$  の個数

ではなく、 $x$  の個数である。

そこで (2) で見たように、

$t$  と  $x$  の個数の関係

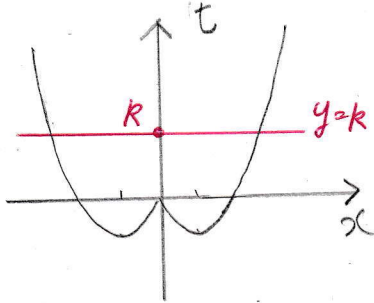
を照らし合わせて考えるとよい。

(2) F1

- $k = -1, 0 < k$  とき  $x$  は 2 個
- $k = 0$  とき  $x$  は 3 個
- $-1 < k < 0$  とき  $x$  は 4 個

" $k$  の値" は " $t$  軸" から導いているから

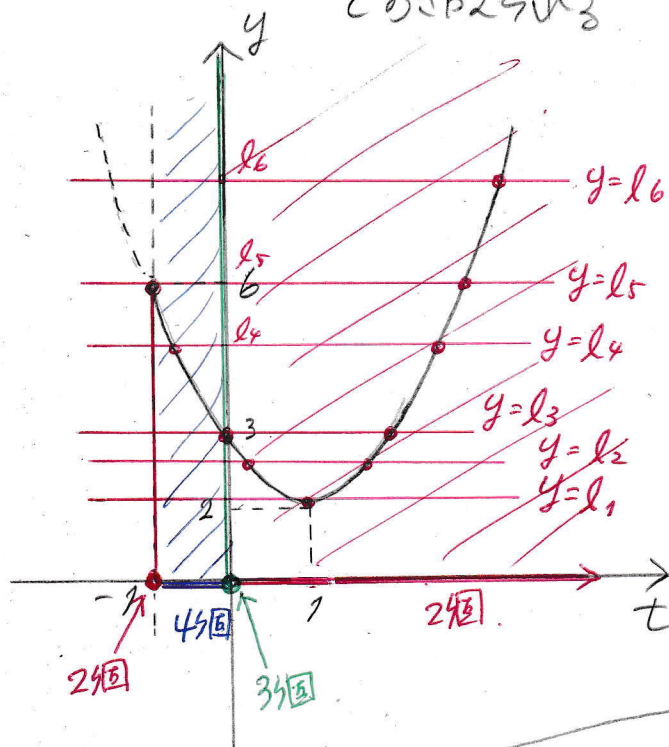
$k \geq t$  に  
置きかえらる。



$t = 0$  のとき...

- $t = -1, 0 < t$  とき  $x$  は 2 個
- $t = 0$  とき  $x$  は 3 個
- $-1 < t < 0$  とき  $x$  は 4 個

と置きかえらる



[答]  $2 < l < 3, l = 6$

- [1]  $l = 2$  とき  $y = l_1$   
 (  $t$  の個数 ... 1 個  
 $x$  の個数 ... 2 個  
 $1 \times 2 = 2$  個 )

- [2]  $2 < l < 3$  とき  $y = l_2$   
 (  $t$  の個数 ... 2 個  
 $x$  の個数 ... 2 個  
 $2 \times 2 = 4$  個 )

- [3]  $l = 3$  とき  $y = l_3$   $t = 0$   
 (  $t$  の個数 ...  $1 + 1$  個  
 $x$  の個数 ...  $3 + 2$  個  
 $1 \times 3 + 1 \times 2 = 5$  個 )

- [4]  $3 < l < 6$  とき  $y = l_4$   
 (  $t$  の個数 ...  $1 + 1$  個  
 $x$  の個数 ...  $4 + 2$  個  
 $1 \times 4 + 1 \times 2 = 6$  個 )

- [5]  $l = 6$  とき  $y = l_5$   
 (  $t$  の個数 ... 2 個  
 $x$  の個数 ... 2 個  
 $2 \times 2 = 4$  個 )

- [6]  $6 < l$  とき  $y = l_6$   
 (  $t$  の個数 ... 1 個  
 $x$  の個数 ... 2 個  
 $1 \times 2 = 2$  個 )