［問題］

$x^2+y^2-2\sqrt{2}kx-2\sqrt{2}ky+4\sqrt{2}k-2=0$ …① がある。

(1) $k=\sqrt{2}$ とする。①が表す図形を求めよ。(8点)

<解説・解答>

$k=\sqrt{2}$ を①に代入

$x^2+y^2-4x-4y+8-2=0$

$(x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)=-6+8$

$(x-2)^2+(y-2)^2=2$

∴中心(2, 2)，半径$\sqrt{2}$の円。

［答］ 中心(2, 2)，半径$\sqrt{2}$の円

(2) kの値にかかわらず，①は定点Mを通る。Mの座標を求めよ。(18点)

<解説・解答>

「kの値にかかわらず…」の問題の解法

$A+Bk=0$

A：kなし部分　Bk：kのついている部分をkでくくり出す

の形にもち込み…

・$A=0$
・$B=0$ かつ

…と立式し，この連立方程式を解く。

<理由>

$A=0$ かつ $B=0$ だから，kの値がいくつであろうが，常に左辺はゼロになるから…

(与式)を変形してみよう

$x^2+y^2-2-2\sqrt{2}k(x+y-2)=0$

x^2+y^2-2 = A，$x+y-2$ = B

$\begin{cases} x^2+y^2-2=0 & \cdots ① \\ x+y-2=0 & \cdots ② \end{cases}$

この連立方程式を解けばよい。

② $y=2-x$ → ①に代入

↙

① $x^2+(2-x)^2-2=0$

$x^2+4-4x+x^2-2=0$

$2x^2-4x+2=0$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

$y=2-x$ に代入

$=1$

M(1, 1)

[答] (1, 1)

(3) 円C; $x^2+y^2-2x-4y+3=0$ がある。①が円Cとただ1つの共有点を持つとき、kの値を求めよ。(24点)

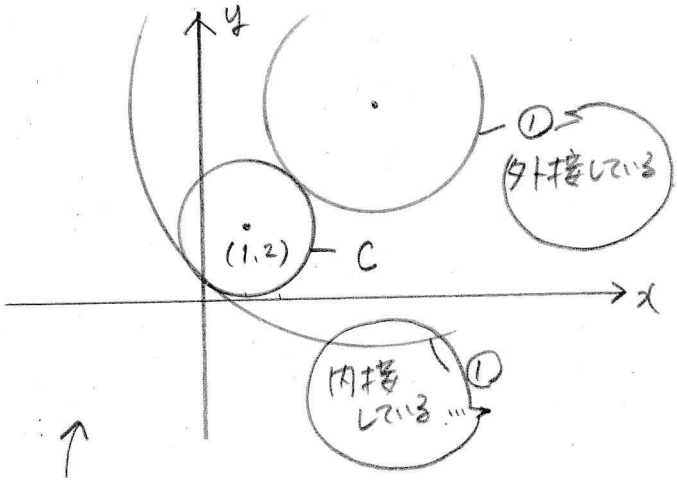
<解説・解答>

円Cを作図してみよう

$x^2-2x+1+y^2-4y+4=-3+5$

$(x-1)^2+(y-2)^2=2$

中心(1, 2)、半径$\sqrt{2}$の円



↑

ただ1つの共有点を持つ = 接する

⇓

外接 と 内接 がある

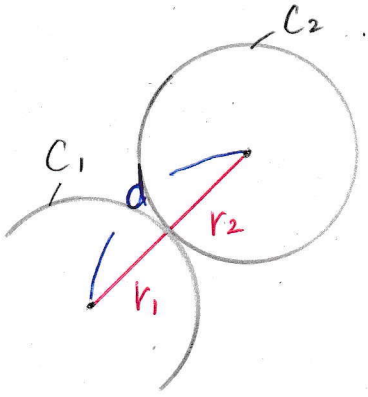
2つの円の"外接"と"内接"

C_1の半径をr_1,

C_2の半径をr_2,

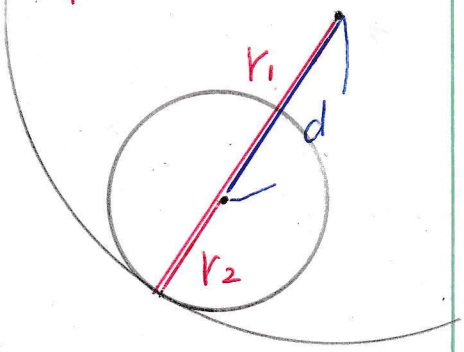
中心間の距離を

dとする.



[1] 外接する

$$d = r_1 + r_2$$



[2] 内接する

$$d = |r_1 - r_2|$$

①を平方完成しよう

$$x^2+y^2-2\sqrt{2}kx-2\sqrt{2}ky+4\sqrt{2}k-2=0$$

$$x^2-2\sqrt{2}kx+y^2-2\sqrt{2}ky=-4\sqrt{2}k+2$$

$$x^2-2\sqrt{2}kx+2k^2+y^2-2\sqrt{2}ky+2k^2=4k^2-4\sqrt{2}k+2$$

$$(x-\sqrt{2}k)^2+(y-\sqrt{2}k)^2=(2k-\sqrt{2})^2$$

(注) 絶対値

↓

中心 $(\sqrt{2}k, \sqrt{2}k)$, 半径 $|2k-\sqrt{2}|$ の円

平方根の重要公式

$$\sqrt{A^2} = |A|$$

①を C_1, 円Cを C_2 とすると…

C_2: 中心 $(1, 2)$ $r_2=\sqrt{2}$

C_1: 中心 $(\sqrt{2}k, \sqrt{2}k)$, $r_1 = |2k-\sqrt{2}|$

$r_1 = |2k-\sqrt{2}|$ $\quad r_2 = \sqrt{2}$

$$d = \sqrt{(\sqrt{2}k-1)^2+(\sqrt{2}k-2)^2}$$

$$= \sqrt{4k^2-6\sqrt{2}k+5}$$

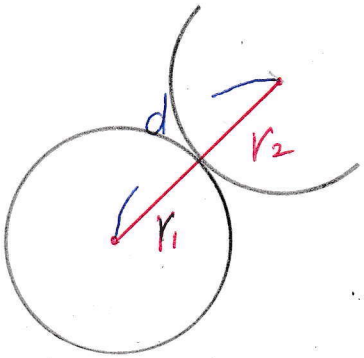
r_1 の決め方

$$|2k-\sqrt{2}| = \begin{cases} 2k-\sqrt{2} & (2k-\sqrt{2} \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -2k+\sqrt{2} & (2k-\sqrt{2} < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$2k-\sqrt{2} \geqq 0$ ↔ $k \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2k-\sqrt{2} < 0$ ↔ $k < \frac{\sqrt{2}}{2}$

[1] 外接する



$r_1 + r_2 = d$

① $k \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき

$$2k-\sqrt{2}+\sqrt{2} = \sqrt{4k^2-6\sqrt{2}k+5}$$

$$2k = \sqrt{4k^2-6\sqrt{2}k+5}$$

$4k^2 = 4k^2 - 6\sqrt{2}k + 5$

$6\sqrt{2}k = 5$

$k = \frac{5}{6\sqrt{2}}$

$= \frac{5}{12}\sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$k \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$ より 不適

② $k < \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき

$-2\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{4k^2 - 6\sqrt{2}k + 5}$

$-2k + 2\sqrt{2} = \sqrt{4k^2 - 6\sqrt{2}k + 5}$

$4k^2 - 8\sqrt{2}k + 8 = 4k^2 - 6\sqrt{2}k + 5$

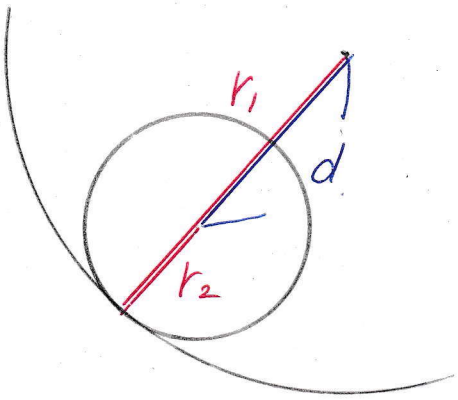
$2\sqrt{2}k = 3$

$k = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore k < \frac{\sqrt{2}}{2}$ より不適

[2] 内接する



$|r_1 - r_2| = d$

③ $k \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき

$2k - \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{4k^2 - 6\sqrt{2}k + 5}$

$2k - 2\sqrt{2} = \sqrt{4k^2 - 6\sqrt{2}k + 5}$

$4k^2 - 8\sqrt{2}k + 8 = 4k^2 - 6\sqrt{2}k + 5$

$2\sqrt{2}k = 3$

$k = \frac{3}{4}\sqrt{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$

$k = \frac{3}{4}\sqrt{2}$ //

④ $k < \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき

$-2k + \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{4k^2 - 6\sqrt{2}k + 5}$

$-2k = \sqrt{4k^2 - 6\sqrt{2}k + 5}$

$4k^2 = 4k^2 - 6\sqrt{2}k + 5$

$6\sqrt{2}k = 5$

$k = \frac{5}{12}\sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore k = \frac{5}{12}\sqrt{2}$ //

[答] $k = \frac{3}{4}\sqrt{2}, \frac{5}{12}\sqrt{2}$.