[問題] 2つの円

$$\begin{cases} C_1 ; x^2-3\sqrt{3}x+y^2+3y-3=0 \\ C_2 ; x^2+\sqrt{3}x+y^2-y-3=0 \end{cases}$$

がある。

(1) C_1, C_2 の中心と半径を求めよ。

<解説・解答>

$C_1 ; x^2-3\sqrt{3}x+y^2+3y-3=0$

$x^2-3\sqrt{3}x+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$+y^2+3y+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-3=0$

$x^2-3\sqrt{3}x+\frac{27}{4}+y^2+3y+\frac{9}{4}=12$

$\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=12$

中心 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 半径 $2\sqrt{3}$

$C_2 ; x^2+\sqrt{3}x+y^2-y-3=0$

$x^2+\sqrt{3}x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$+y^2-y+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-3=0$

$x^2+\sqrt{3}x+\frac{3}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}=4$

$\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4$

中心 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 半径 2

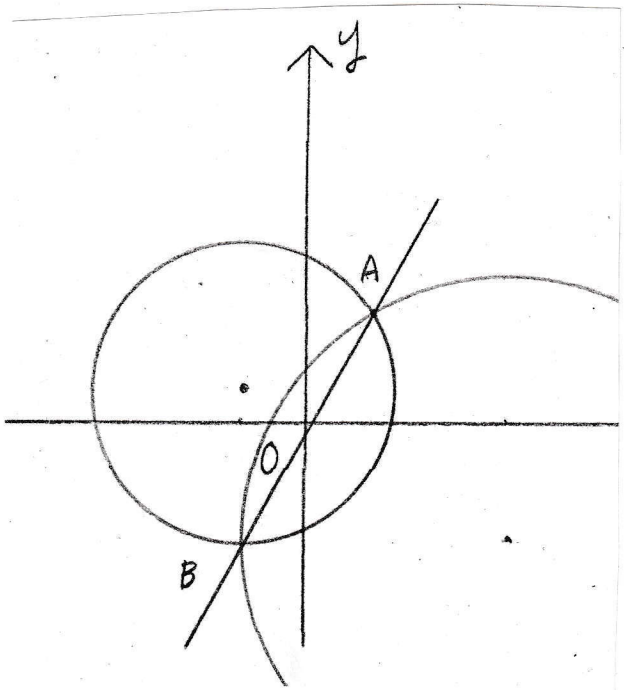
[答]

C_1 ; 中心 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

半径 $2\sqrt{3}$

C_2 ; 中心 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

半径 2



(2) 2つの円が交わる点を A, B とする。直線 AB の式を求めよ。

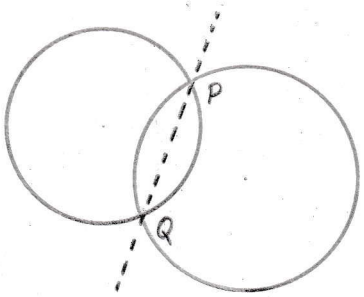
<解説・解答>

下の公式に注目！

2つの円の交点を通る円，直線

異なる2点 P, Q で交わる2つの円

$x^2+y^2+l_1x+m_1y+n_1=0$ … Ⓐ



$x^2+y^2+l_2x+m_2y+n_2=0$ … Ⓑ に対し，

k を定数とすると，

方程式 $k(x^2+y^2+l_1x+m_1y+n_1)+x^2+y^2+l_2x+m_2y+n_2=0$ は，

$k=-1$ のとき，P, Q を通る直線。

$k\neq-1$ のとき，P, Q を通る円。

k を定数とする

$k(x^2+y^2-3\sqrt{3}x+3y-3)$

$+x^2+y^2+\sqrt{3}x-y-3=0$.

AB は直線だから，$k=-1$ を

代入して，

$-x^2-y^2+3\sqrt{3}x-3y+3$

$+x^2+y^2+\sqrt{3}x-y-3=0$.

$4\sqrt{3}x-4y=0$

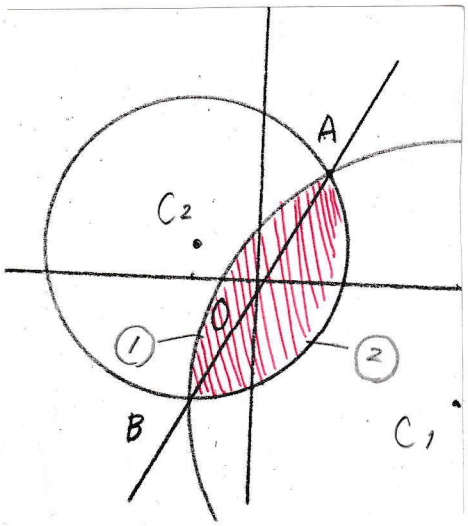
$\sqrt{3}x-y=0$. //

[答] $\sqrt{3}x-y=0$

$y=\sqrt{3}x$ でも可.

(3) C_1の内部とC_2の内部で囲まれた部分の面積をDとする。
Dの面積を求めよ。

<解説・解答>

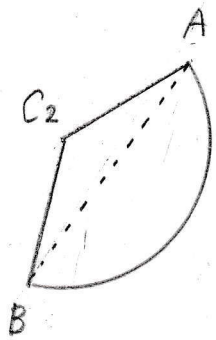


<解き方>

Dを2つに分ける。

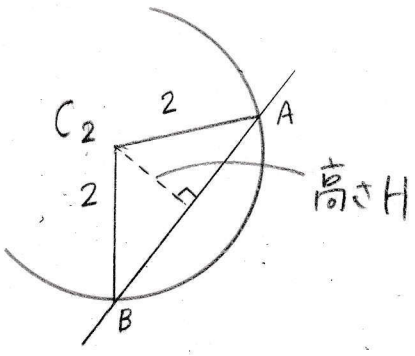
直線ABより上の部分(①)と下の部分(②)に分けて求める。

<①,②の求め方>



おうぎ形ABC_2の面積から、$\triangle ABC_2$の面積を引いて求める

<$\triangle ABC_2$の面積の求め方>



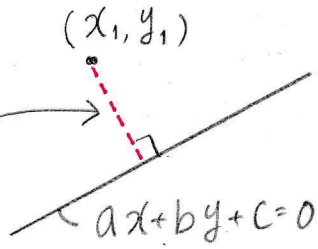
高さHを求める

点C_2と直線ABの距離を求める

点と直線の距離

点(x_1, y_1)と直線$ax+by+c=0$の距離

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

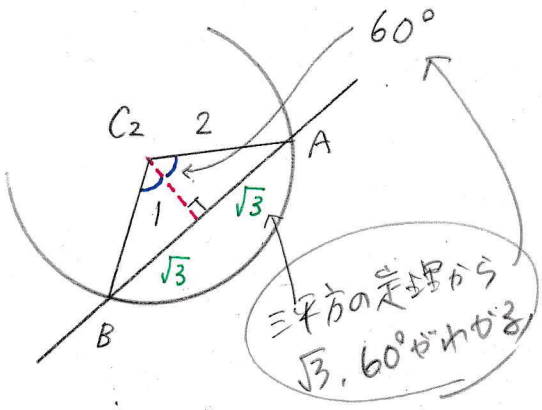


$C_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$と$\sqrt{3}x-y=0$の距離

$$\frac{\left|\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(-1)\times\frac{1}{2}+0\right|}{\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|-2|}{2}$$

$$=1$$



∴このことから、いろんなことがわかってくる

上図の通りだ。

$\triangle ABC_2$の面積を求めよう。

$$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}$$

また、$\angle AC_2B=120°$もわかったから、おうぎ形ABC_2の面積も求めよう。

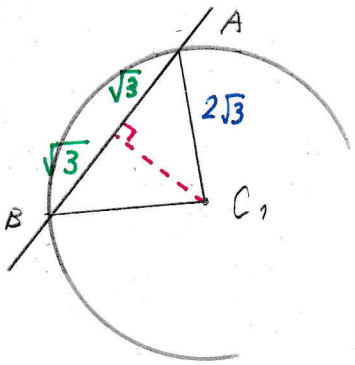
$$2^2 \times \pi \times \frac{120^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{4}{3}\pi.$$

∴ ① = おうぎ形 $ABC_2 - \triangle ABC_2$

$$= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \quad \cdots ①$$

次に②の面積をもとめよう.



高さhをもとめよう.

三平方の定理でいける.

$$h = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3$$

$\triangle ABC_1$ の面積

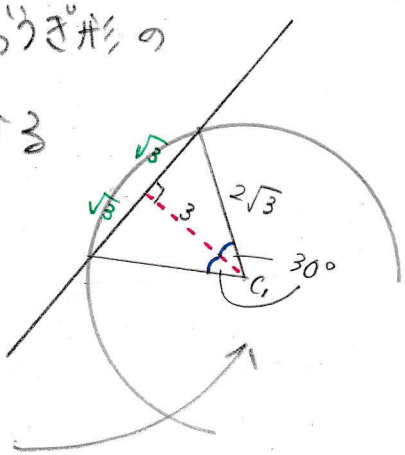
$$\frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

このことから, おうぎ形の中心角もわかる

$\sqrt{3} : 2\sqrt{3} : 3$

$= 1 : 2 : \sqrt{3}$ より



おうぎ形 ABC_1 の面積

$$(2\sqrt{3})^2 \times \pi \times \frac{60^\circ}{360^\circ}$$

$$= 2\pi.$$

② の面積 = おうぎ形 $ABC_1 - \triangle ABC_1$

$$= 2\pi - 3\sqrt{3} \quad \cdots ②$$

Dの面積 = ① + ②

$$= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} + 2\pi - 3\sqrt{3}$$

$$= \frac{10}{3}\pi - 4\sqrt{3}$$

[答] $\frac{10}{3}\pi - 4\sqrt{3}$

(4) 点(x, y)が領域Dを動くとき、$x+2y$の最大値と最小値を求めよ。

<解説・解答>

[解き方手順]

$x+2y=k$ とおく

$x+2y$の最大値、最小値

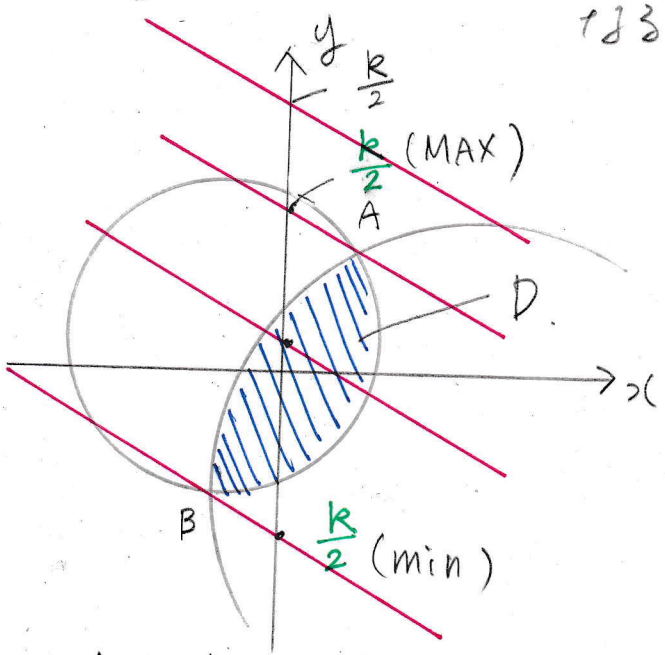
⇓

kの最大値、最小値を求める。

$x+2y=k$

⇓

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ と一次関数にすると、$\frac{k}{2}$は、その切片ということになる。



$y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ がDを通過するときの切片の最大値と最小値を…

最大値 … 点Aを通るとき

最小値 … 点Bを通るとき

点A、Bを求めよう。

$$\begin{cases} C_2 ; x^2+\sqrt{3}x+y^2-y-3=0 \\ \qquad (C_1 でもよい) \\ y=\sqrt{3}x \end{cases}$$

の交点

$x^2+\sqrt{3}x+3x^2-\sqrt{3}x-3=0$

$4x^2-3=0$

$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y=\sqrt{3}x$ より

$y=\sqrt{3}\times\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\pm\frac{3}{2}$

$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

最大値 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{3}{2}$ のとき

$x+2y=\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{3}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+3$ //

最小値. $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=-\frac{3}{2}$ のとき.

$$x+2y=-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-3.$$

//

[答] 最大値 $\frac{\sqrt{3}}{2}+3$

最小値 $-\frac{\sqrt{3}}{2}-3$