[問題] 2次関数 $f(x)=x^2-2a|x|+2$ がある。(aは実数の定数とする)

(1) $a=1$ とする。

(i) $y=f(x)$ のグラフを書け。

<解説・解答>

$$y=f(x)=x^2-2a|x|+2.$$

$a=1$ を代入する

$$y=x^2-2|x|+2.$$

絶対値を開こう!

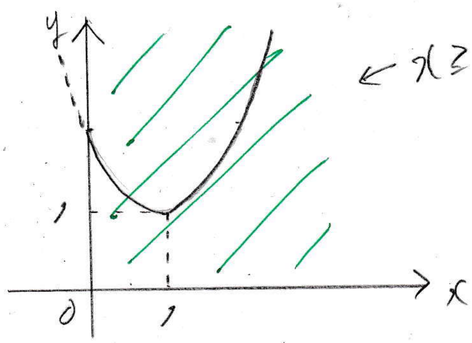
$$|x|=\begin{cases} x & (x\geqq 0\text{のとき}) \quad \cdots ① \\ -x & (x<0\text{のとき}) \quad \cdots ② \end{cases}$$

① $x\geqq 0$のとき

$$y=x^2-2x+2.$$

$$=(x^2-2x+1-1)+2.$$

$$=(x-1)^2+1 \qquad \text{頂点}(1,1)$$



← $x\geqq 0$より

② $x<0$のとき

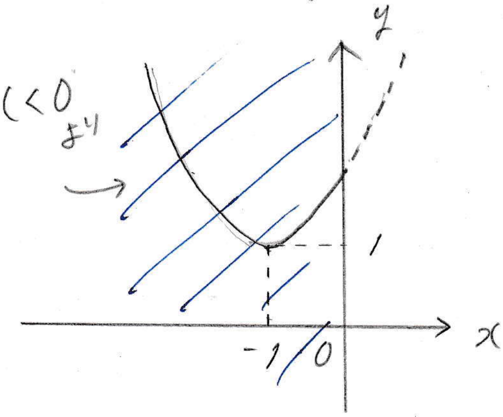
$$y=x^2-2\cdot(-x)+2$$

$$=x^2+2x+2.$$

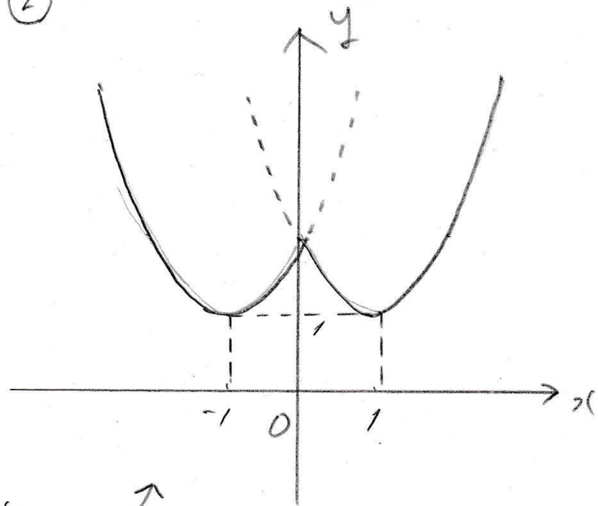
$$=(x^2+2x+1-1)+2.$$

$$=(x+1)^2+1 \qquad \text{頂}(-1,1)$$

$x<0$より



① + ②



[答]

(ii) $f(x)$のグラフをx軸方向に1，y軸方向に-2平行移動したグラフを$g(x)$とする。

グラフを利用して

$$g(x) > \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

を解け。

<解説・解答>

$y = f(x) = x^2 - 2|x| + 2$ とおく

ここで…

重要！

① 絶対値を開く

② グラフの平行移動

どちらを先に行うべきだろうか？？

②である！！

$y = x^2 - 2|x| + 2$

x軸方向に 1

y軸方向に -2 だから…

$$y - (-2) = (x - 1)^2 - 2|x - 1| + 2$$

$$y + 2 = x^2 - 2x + 1 - 2|x - 1| + 2$$

$$= x^2 - 2|x - 1| - 2x + 1$$

ここで絶対値を開く

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & (x - 1 \geqq 0 \text{ のとき}) \cdots ① \\ -x + 1 & (x - 1 < 0 \text{ のとき}) \cdots ② \end{cases}$$

① $x - 1 \geqq 0 \Rightarrow x \geqq 1$ のとき

$$y = x^2 - 2(x - 1) - 2x + 1$$

$$= x^2 - 4x + 3$$

② $x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$ のとき

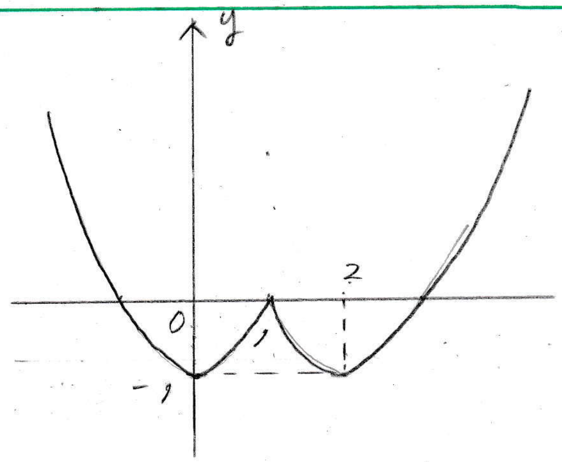
$$y = x^2 - 2 \cdot (-x + 1) - 2x + 1$$

$$= x^2 - 1$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & (x \geqq 1) \\ x^2 - 1 & (x < 1) \end{cases}$$

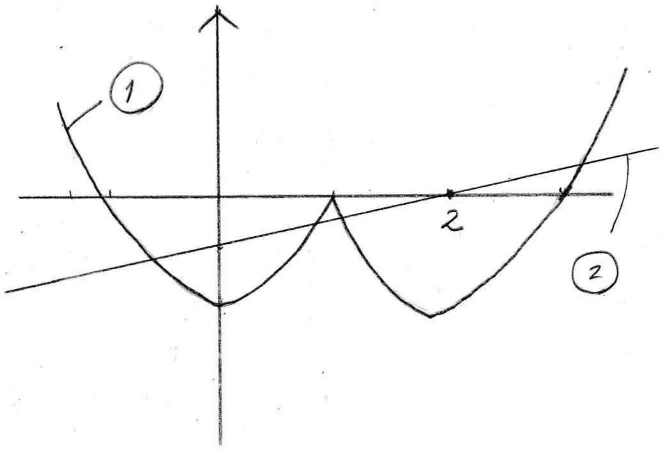
では，$y \geqq g(x)$ を図示しよう

$$g(x) = x^2 - 4x + 3 \quad (x \geqq 1)$$
$$= (x-2)^2 - 1$$
$$g(x) = x^2 - 1 \quad (x < 1)$$



$g(x) > \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}$ を解こう

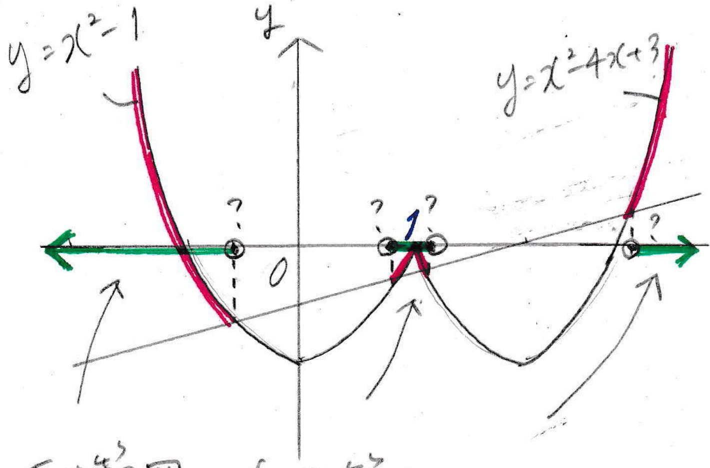
$$\begin{cases} \cdot\ y = g(x) & \leftarrow ① \\ \cdot\ y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2} & \leftarrow ② \end{cases}$$
に分けよう



$g(x) > \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}$ であるから

②のグラフより①のグラフの方が

上部にあるときの x の範囲を解く



この範囲の x が答えとなる.

?の値をすべてもとめよう.

①
$$\boxed{\begin{aligned} y &= x^2 - 1 \\ y &= \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}}$$

②
$$\boxed{\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 3 \\ y &= \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}}$$

これらの交点をもとめよう

① $x^2 - 1 = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2}$

$$4x^2 - 4 = x - 2$$
$$4x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$\dfrac{1-\sqrt{33}}{8} < 1$, $\dfrac{1+\sqrt{33}}{8} < 1$ より

1より小さいか確認

$x < \dfrac{1-\sqrt{33}}{8}$, $\dfrac{1+\sqrt{33}}{8} < x < ?$

後で合算して判明

② $y = x^2 - 4x + 3$

$y = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$

$x^2 - 4x + 3 = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$

$4x^2 - 16x + 12 = x - 2$

$4x^2 - 17x + 14 = 0$

$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 224}}{8}$

$= \frac{17 \pm \sqrt{65}}{8}$

$\frac{17 - \sqrt{65}}{8} > 1$, $\frac{17 + \sqrt{65}}{8} > 1$

1より大きいか確認 より

? $< x < \frac{17 - \sqrt{65}}{8}$, $\frac{17 + \sqrt{65}}{8} < x$

①と合算

①, ② より

$x < \frac{1 - \sqrt{33}}{8}$, $\frac{1 + \sqrt{33}}{8} < x < \frac{17 - \sqrt{65}}{8}$

$\frac{17 + \sqrt{65}}{8} < x$ …[答]

(2) $h(x) = b - x^2$ がある。(bは実数の定数とする) $f(x) = 0$, $h(x) = 0$ の共通解がちょうど2個となるときのbの値の範囲を求めよ。

<解説・解答>

$\left.\begin{array}{l} \cdot f(x) = 0 \\ \cdot h(x) = 0 \end{array}\right\}$ の共通解が2個。

$\Downarrow$

$\left.\begin{array}{l} \cdot y = f(x), \\ \cdot y = h(x) \end{array}\right\}$ 2つのグラフの交点が2個

としてbの範囲を求めよう。

$y = f(x) = x^2 - 2a|x| + 2$

のグラフを書こう。

$|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0 \text{のとき}) \\ -x & (x < 0 \text{のとき}) \end{cases}$

① $x \geqq 0$ のとき

$y = x^2 - 2ax + 2$

$= x^2 - 2ax + a^2 - a^2 + 2$

$= (x-a)^2 + 2 - a^2$

頂点 $(a,\ 2-a^2)$

② $x<0$ のとき

$y = x^2 - 2a\cdot(-x) + 2$

$= x^2 + 2ax + 2$

$= x^2 + 2ax + a^2 - a^2 + 2$

$= (x+a)^2 + 2 - a^2$

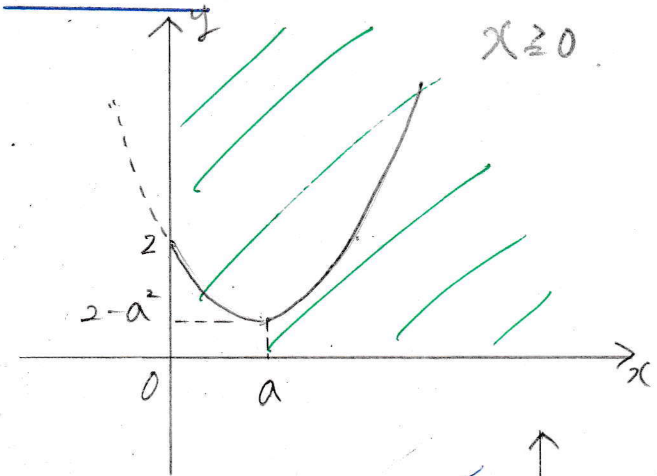
頂点 $(-a,\ 2-a^2)$

グラフは ㋐ $a \geqq 0$ のとき
㋑ $a < 0$ のとき
で分けて書こう

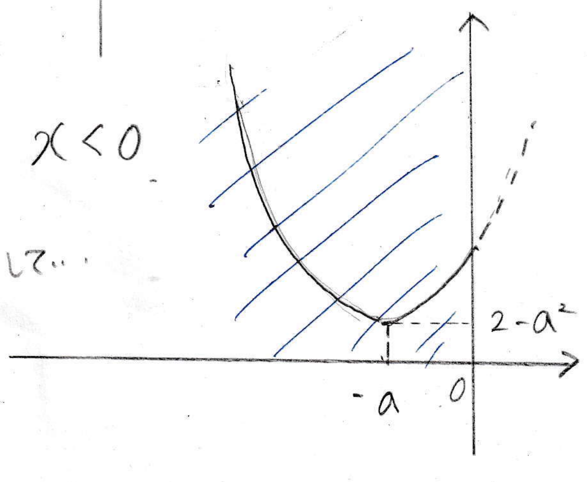
重要!

㋐ $a \geqq 0$ のとき

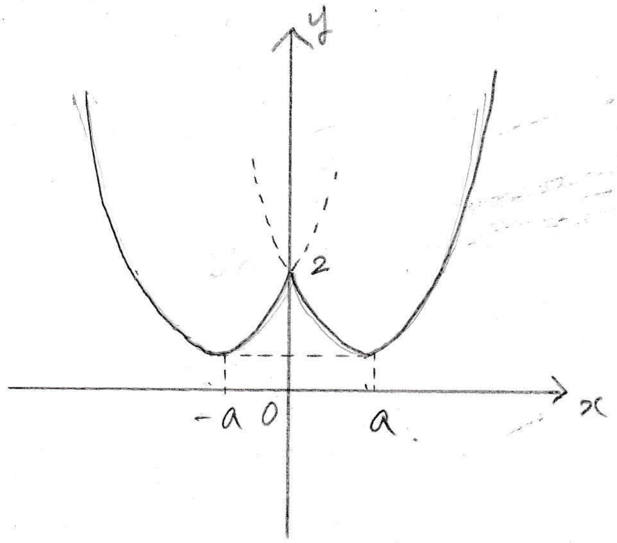
$x \geqq 0$



$x<0$

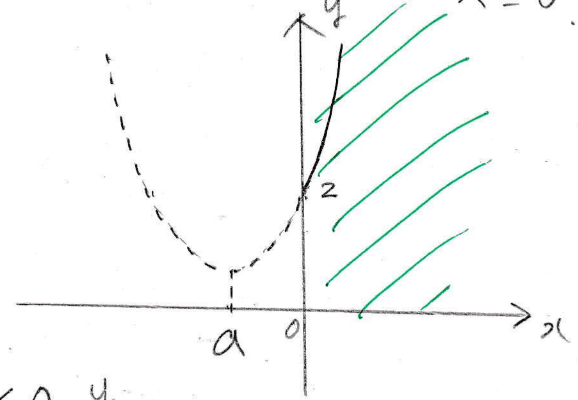


合算して…

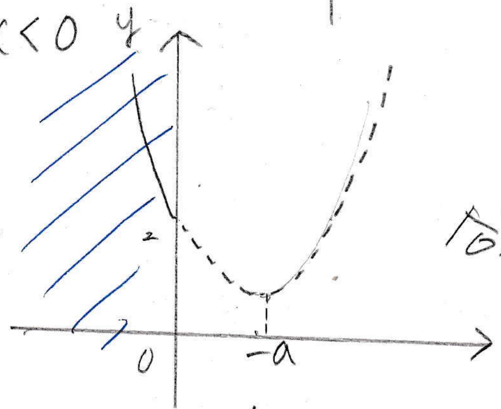


㋑ $a<0$ のとき

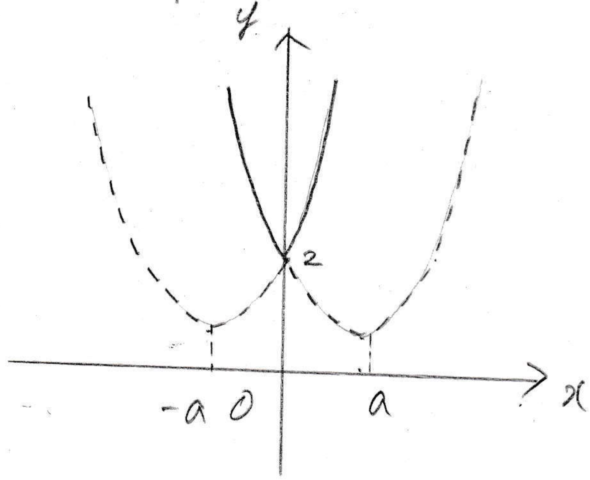
$x \geqq 0$



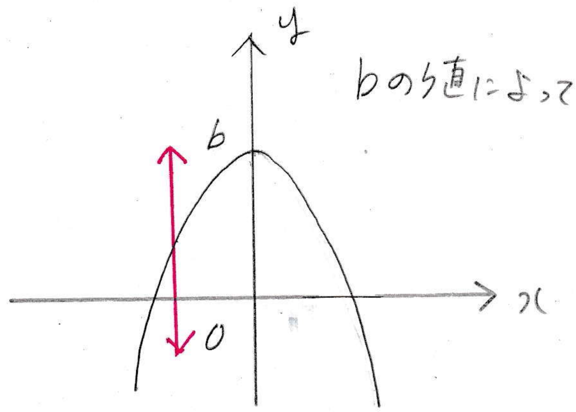
$x<0$



合算して…



次に $y = b - x^2$ を作図しよう

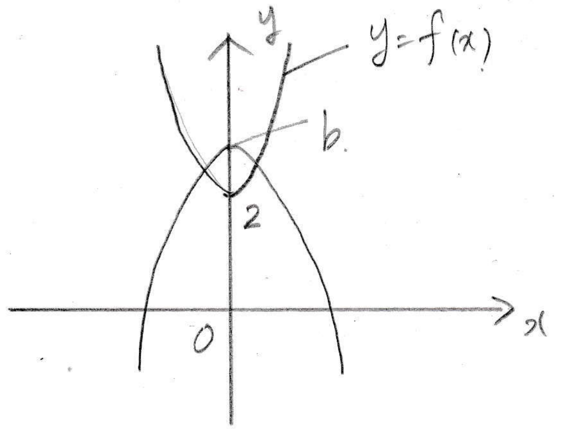


$y=f(x)$の2つのグラフと対比させて

bの値の範囲を考えよう

まず簡単な い $a<0$のときから

考えよう。



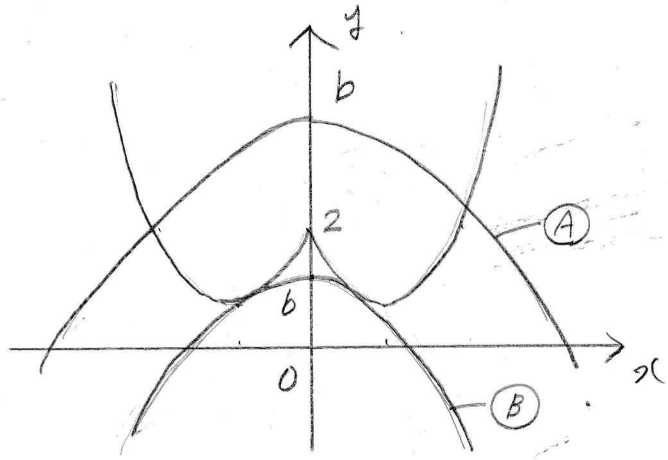
$y=f(x)$は aの値に関係なく、

最小値 $(0, 2)$ を通るから…

$b>2$ でよい。

答 い

次に あ $a\geqq 0$のとき



A と B の2つのパターンが考えられる。

A は簡単。

$b>2$ — 答 あ A

B は $y=f(x)$ と $y=h(x)$ が

接するときだ。

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+2 & (x\geqq 0) \\ x^2+2ax+2 & (x<0) \end{cases}$$

$$h(x)=b-x^2$$

$y=f(x)$と$y=h(x)$の交点を

求めるように連立方程式とし、

判別式$=0$を用いよう

"接する"だから。

※$f(x)$はどちらを用いてもよい。

$x^2-2ax+2=b-x^2$

$2x^2-2ax+2-b=0$

$\frac{D}{4}=a^2-2(2-b)=0$

$a^2-4+2b=0$

$2b=4-a^2$

$b=\frac{4-a^2}{2}$ …答あB

[答] $a\geqq 0$ のとき

$b>2$ または

$b=\frac{4-a^2}{2}$

$a<0$ のとき

$b>2$

※ $a=0$ は どちらでもよい