[問題] aを実数の定数とする。θの関数 $y=(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta-2a)(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)+3$ について、次の各問いに答えよ。ただし、$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $t=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ とするとき tの最小値およびそのときのθの値を求めよ。

<解説・解答>

$t=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ の最小値を求める。合成しよう

三角関数の合成 ― 公式確認

$$a\sin\theta-b\cos\theta$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし、αは $\begin{cases} \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

をみたすαとする。

$$t=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}\sin(\theta+\alpha)$$

$$=2\sin(\theta+\alpha)$$

αは $\begin{cases} \sin\alpha=\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \cos\alpha=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

をみたす値… $\alpha=-\dfrac{\pi}{3}$

$$\therefore t=2\cdot\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

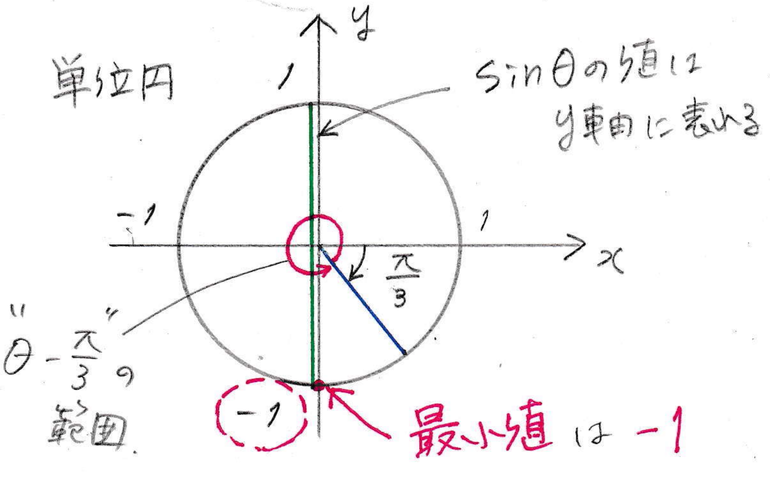
では、tの最小値をもとめよう。

単位円を用いて、 半径1の円

$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ の最小値を定めよう

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$-\frac{\pi}{3} \leqq \theta-\frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$



$t = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$

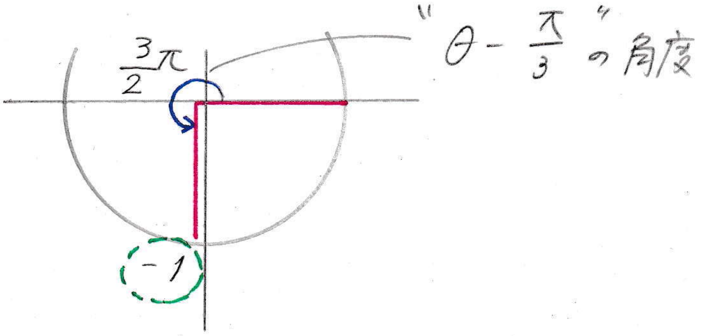
$\qquad\qquad\quad \shortparallel$

最小値 -1 を代入

$= 2\times(-1)$

$= \underline{-2}$ — 答 最小値

そのときの θ を求める。



$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) = -1$ となるのは、

$\theta - \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\pi$ のとき

$\theta = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{3}$

$= \frac{10}{6}\pi = \underline{\frac{5}{3}\pi}$ 答 θの値

$\boxed{\begin{array}{l}\text{[答] 最小値} \quad -2 \\ \qquad \theta\text{の値} \quad \frac{5}{3}\pi\end{array}}$

(2) yの最小値を $m(a)$ とするとき、$m(a)$ を求めよ。

<解説・解答>

yを、tを用いて変形しよう

$y = (\underbrace{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}_{= t} - 2a)\cdot$

$\quad(\underbrace{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}_{= t}) + 3$

$y = (t-2a)\cdot t + 3$

$= t^2 - 2at + 3$

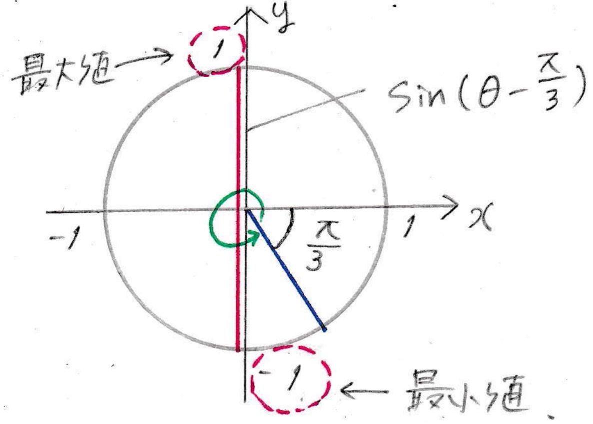
tの2次関数となった！

2次関数の最小値を求めるように解こう！

そのとき、tの範囲を求めるのを忘れずに…！

$t = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$

$= 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$



よって

$$-1 \leqq \sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) \leqq 1$$

$$-2 \leqq 2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) \leqq 2$$

$$-2 \leqq t \leqq 2$$ ← tの範囲

まとめよう

$$\boxed{\begin{array}{l} y = t^2-2at+3 \\ -2 \leqq t \leqq 2 \end{array}}$$

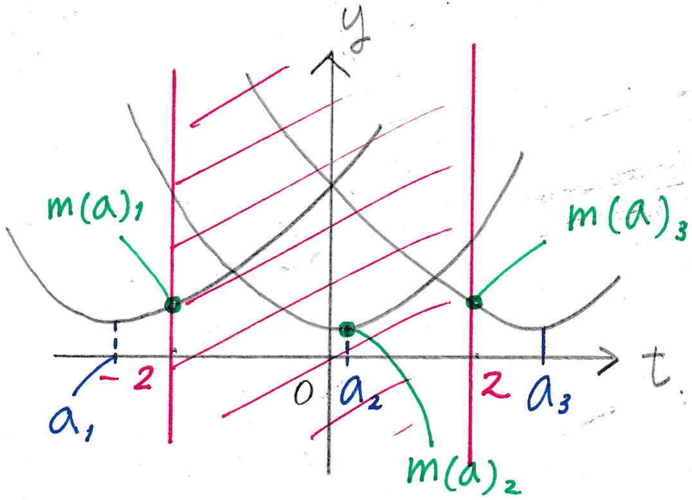
$$y = (t^2-2at+a^2-a^2)+3$$

$$= (t-a)^2-a^2+3$$

頂点 $(a, -a^2+3)$

最小値 $m(a)$ を求めよう

軸 $x=a$ により最小値が変わりそうだ ⇒ 場合分け



[1] $a \leqq -2$ のとき

最小値は $t=-2$ のとき

$$m(a) = (-2)^2-2a\times(-2)+3$$

$$= 4+4a+3$$

$$= 4a+7$$ …答1

[2] $-2 < a \leqq 2$ のとき

最小値は $t=a$ のとき

$$m(a) = -a^2+3$$ …答2

[3] $2 < a$ のとき

最小値は $t=2$ のとき

$$m(a) = 2^2-2a\times2+3$$

$$= -4a+7$$ …答3

［答］ $a \leqq -2$ のとき

$m(a) = 4a+7$

$-2 < a \leqq 2$ のとき

$m(a) = -a^2+3$

$2 < a$ のとき

$m(a) = -4a+7$

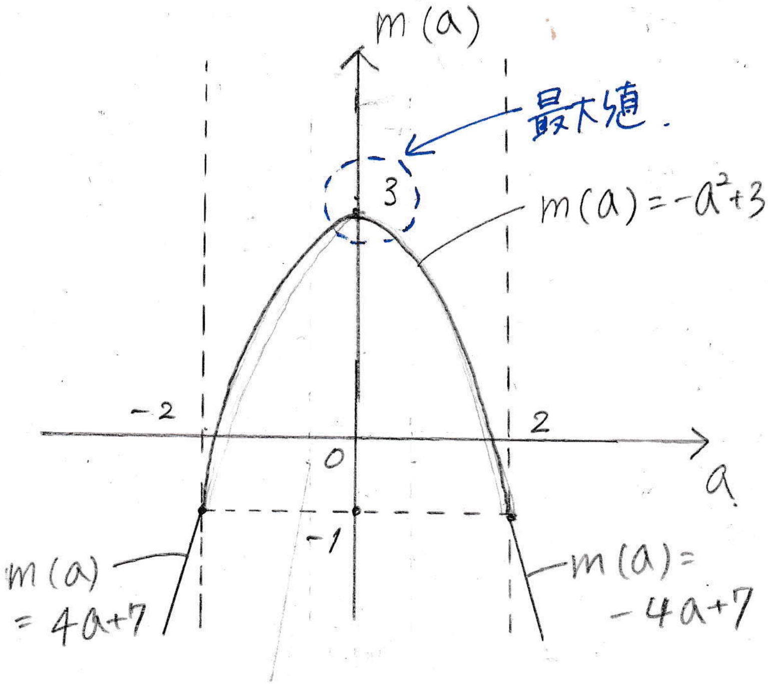
(3) $m(a)$ の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

〈解説・解答〉

(2)より

$$m(a) = \begin{cases} 4a+7 & (a \leqq -2) \\ -a^2+3 & (-2 < a \leqq 2) \\ -4a+7 & (2 < a) \end{cases}$$

これをグラフに表してみよう



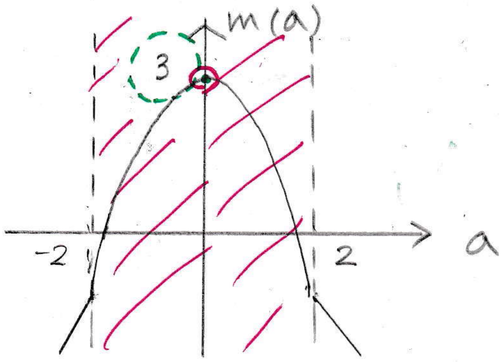
∴ $m(a)$ の最大値は 3 …答

そのときの θ を求めよう

$m(a) = 3$

このときの $m(a)$ は…

$$m(a)=\begin{cases}4a+7 & (a\leqq -2)\\ -a^2+3 & (-2<a\leqq 2)\\ -4a+7 & (2<a)\end{cases}$$



$$m(a)=-a^2+3=3$$

$$-a^2=0$$

$$a^2=0$$

$$a=0$$

∴ $a=0$のとき である.

次に

$y=t^2-2at+3$ に

$a=0$を代入しよう

$$y=t^2+3$$

↓

ここで yの値を考えよう

$m(a)$は、yの最小値であること

から、 $m(a)=y$. である.

$y=3$を代入 → $3=t^2+3$

$$t^2=0$$

$$t=0$$

$t=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ の tに

0を代入

↓

$$0=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=0.$$

$$\theta-\frac{\pi}{3}=0,\ \pi$$

$$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi \cdots 答_2$$

〔答〕最大値 3.

$$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$$