[問題] tを実数とする($t \neq 2$)
xy平面上の点C;

$$x^2-2tx+y^2-6ty=-40t+40$$

がある。

(1) Cの中心の座標と半径をtを用いて表せ。

[答] 中心$(t, 3t)$

半径$\sqrt{10}(t-2)$

<解説・解答>

$$x^2-2tx+y^2-6ty=-40t+40$$

$$x^2-2tx+t^2+y^2-6ty+9t^2$$

$$=10t^2-40t+40$$

$$(x-t)^2+(y-3t)^2=10(t-2)^2$$

中心$(t, 3t)$

$$r=\sqrt{10(t-2)^2}$$

$$=\sqrt{10}\cdot\sqrt{(t-2)^2}$$

2乗の平方根は絶対値をつけることを！

$$\sqrt{A^2}=|A|$$

$$=\sqrt{10}\,|t-2|$$

$t-2>0$より

$$=\sqrt{10}(t-2)$$ //

(2) Cはtに関係なくある定点を通る。定点の座標を求めよ。

＜解説・解答＞

解法

文字のついた方程式で(たとえばk)…「kの値に関係なく定点を通る」の問題の解き方

たとえば…

$$2y+3k=6kx+8$$

という式があるとする

(解き方手順①)

すべて左辺に移項し、右辺=0とする

$$2y+3k-6kx-8=0$$

(解き方手順②)

kのついた部分をまとめる。

$$(2y+8)+k(3-6x)=0$$

(解き方手順③)

各係数=0とする連立方程式を作り解く

$$\begin{cases} 2y+8=0 \\ 3-6x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-4 \end{cases}$$

$$x^2-2tx+y^2-6ty=-40t+40$$

$$(x^2+y^2-40)-2t(x+3y-20)=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-40=0 \cdots ① \\ x+3y-20=0 \cdots ② \end{cases}$$

② $x=20-3y \Rightarrow$ ①に代入

$$(20-3y)^2+y^2-40=0$$

$$400-120y+9y^2+y^2-40=0$$

$$10y^2-120y+360=0$$

$$y^2-12y+36=0$$

$$(y-6)^2=0$$

$y=6 \Rightarrow$ ②に代入

$$x=20-3\cdot6=20-18=2$$

$\therefore (x, y)=(2, 6)$ //

[答] $(x, y)=(2, 6)$

(3) xy平面上において

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geqq 40 \\ x^2+(y-8)^2 \leqq 90 \end{cases}$$ の表す領域

をD_1、

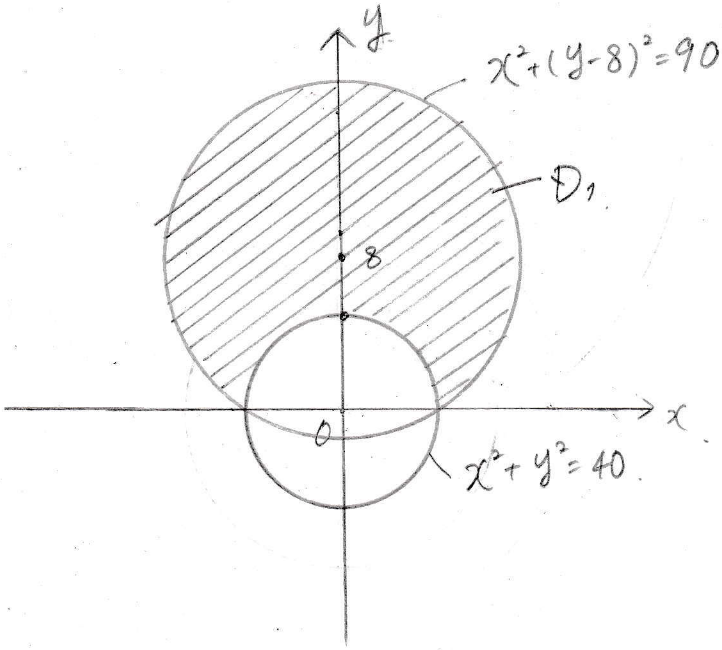
$x^2-2tx+y^2-6ty \leqq -40t+40$

の表す領域をD_2とする。

D_2がD_1に含まれるようなtの値の範囲を求めよ。

＜解説・解答＞

それぞれ作図しよう



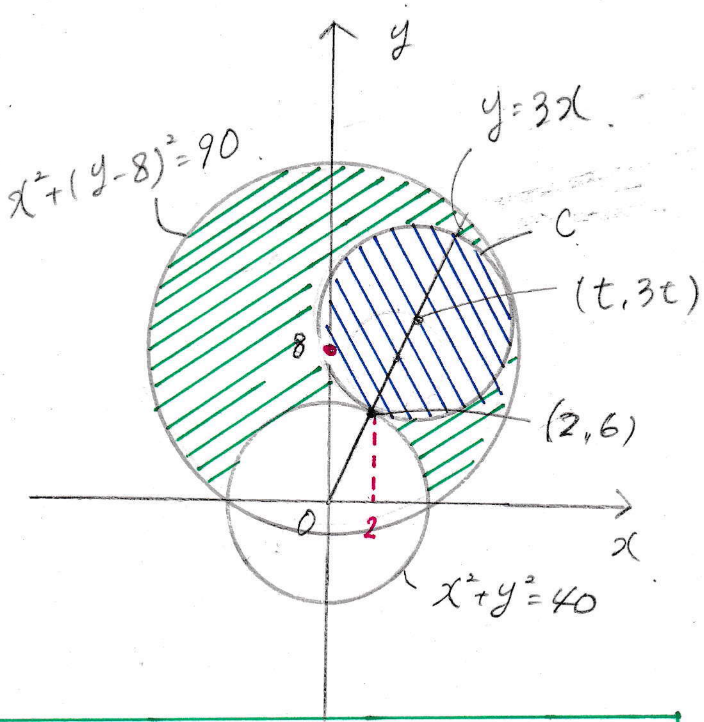
$x^2-2tx+y^2-6ty=-40t+40$

$(x-t)^2+(y-3t)^2=10(t-2)^2$

$(t,3t)$ $r=\sqrt{10}(t-2)$

また(2)より Cは $(2,6)$を通る。

D_2がD_1に含まれるように、計算を考えよう。



$(2,6)$は $x^2+y^2=40$上を通る

また、$(t,3t)$は $y=3x$上を通る

tの範囲は…

$$2 < t \leqq ?$$

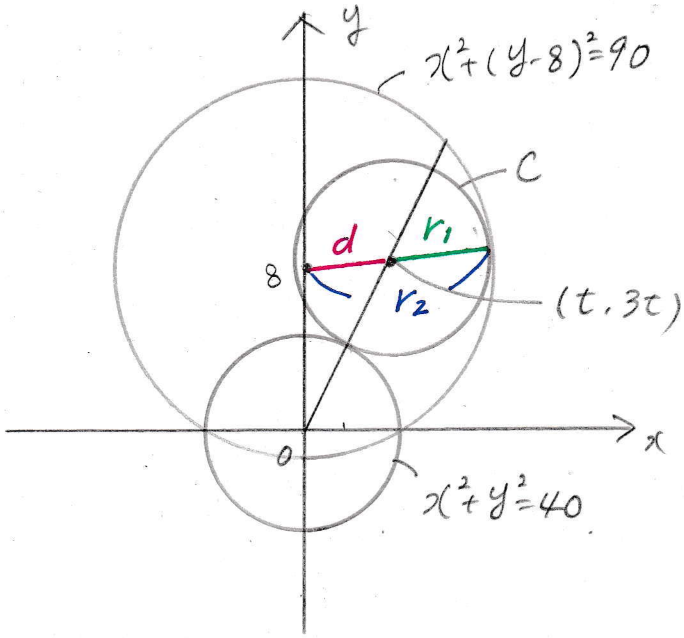
?は、Cが $x^2+(y-8)^2=90$ と内接しているとき、である

・Cの半径をr_1

・$x^2+(y-8)^2=90$ の半径をr_2

・これら2円の中心間の距離をdとする。

$$r_2-r_1=d$$



$r_1 = \sqrt{10}(t-2)$, $r_2 = 3\sqrt{10}$

d は $(0, 8)$ $(t, 3t)$ との距離

$d = \sqrt{t^2+(3t-8)^2}$

$r_2 - r_1 = d$

$3\sqrt{10} - \sqrt{10}(t-2) = \sqrt{t^2+(3t-8)^2}$

$5\sqrt{10} - \sqrt{10}t = \sqrt{t^2+9t^2-48t+64}$

$\sqrt{10}(5-t) = \sqrt{10t^2-48t+64}$

両辺を2乗する

$10(5-t)^2 = 10t^2-48t+64$

$10(25-10t+t^2) = 10t^2-48t+64$

$250-100t+10t^2 = 10t^2-48t+64$

$42t = 186$

$t = \frac{186}{42}$

$= \frac{31}{7}$

$\therefore\ 2 < t \leqq \frac{31}{7}$

[答] $2 < t \leqq \frac{31}{7}$