[問題] 整数 x, y が $7x-9y=3$ …① を満たしている。

(1) 整式①を満たす x, y の組をすべて求めよ。x, y がともに3桁の整数となるような x, y の組は全部で何組あるか求めよ。

＜解説・解答＞

①の一次不定方程式を解く。

$7x-9y=3$ を満たす整数の組を適当に1つ上げると…$(3, 2)$ を①に代入し

$$7\cdot3-9\cdot2=3 \quad \cdots ②$$

①−②

$$\begin{array}{rr} & 7x-9y=3 \\ -) & 7\cdot3-9\cdot2=3 \\ \hline & 7(x-3)-9(y-2)=0 \end{array}$$

移項

$$7(x-3)=9(y-2)$$

ここで7と9は互いに素であるから、

$$\begin{cases} \cdot\ x-3 \text{ は } 9 \text{ の倍数} \\ \cdot\ y-2 \text{ は } 7 \text{ の倍数} \end{cases}$$

整数 k を用いて

$$\begin{cases} x-3=9k \\ y-2=7k \end{cases}$$

変形して

$$\begin{cases} x=9k+3 \\ y=7k+2 \end{cases}$$

← すべての x, y (答)

次に、これらの x, y がともに3桁となればよいから…

$$\begin{cases} 100 \leqq 9k+3 < 1000 \quad ① \\ 100 \leqq 7k+2 < 1000 \quad ② \end{cases}$$

①、②をともに満たす整数 k の数を求める。

① $97 \leqq 9k < 997$

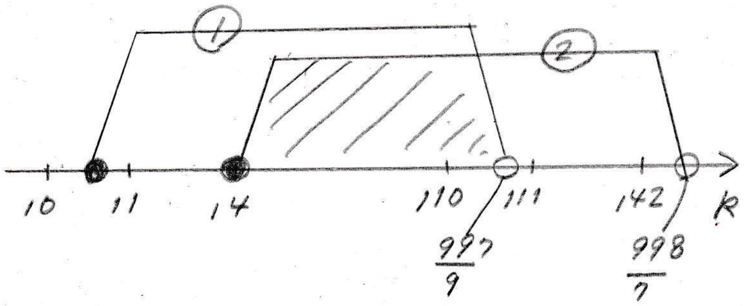
$$\frac{97}{9} \leqq k < \frac{997}{9}$$

$$\left(10\frac{7}{9}\right) \qquad \left(110\frac{7}{9}\right)$$

② $98 \leqq 7k < 998$

$$14 \leqq k < \frac{998}{7}$$

$$\left(142\frac{4}{7}\right)$$



$\therefore\ 14 \leqq k < \dfrac{997}{9}$

整数kは　$14 \leqq k \leqq 110$

個数は…　$110 - 14 + 1$　（+1を忘れず!）

$= 97$

［答］　$x = 9k + 3,\ y = 7k - 2.$

（kは整数）

97組.

(2) 7で割ると2余り、9で割ると3余る整数をNとする。4桁であり、かつ5の倍数である最小のNを求めよ。

＜解説・解答＞

まずはNを求めよう.

① 7で割ると3余るから　$N = 7l + 2$

② 9で割ると2余るから　$N = 9m + 3$

（l, mは整数）

①,②の条件をともに満たすようにNを表す.

$$7l + 2 = 9m + 3$$

$$7l - 9m = 1 \quad \cdots ③$$

この一次不定方程式を解く.

③を満たす(l, m)の1つは…

$(4, 3) \rightarrow$ ③に代入

$$7 \cdot 4 - 9 \cdot 3 = 1 \quad \cdots ④$$

③−④

$$\begin{array}{rl} & 7l - 9m = 1 \\ -) & 7 \cdot 4 - 9 \cdot 3 = 1 \\ \hline & 7(l-4) - 9(m-3) = 0 \end{array}$$

$7(l-4)=9(m-3)$

7, 9は互いに素だから

$\begin{cases} \cdot\ l-4 \text{は}9\text{の倍数} \\ \cdot\ m-3 \text{は}7\text{の倍数} \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \cdot\ l-4=9n \\ \cdot\ m-3=7n \end{cases}$ （nは整数）

$\begin{cases} l=9n+4 \\ \cdot\ m=7n+3 \end{cases}$

代入

ここで $\begin{cases} N=7l+2 \\ N=9m+3 \end{cases}$

ちなみに
mに代入しても
同じ結果が
得られる…

$N=7(9n+4)+2$

$=63n+30$

これが①②の条件をともに満たす
N

・4桁かつ5の倍数で最小

を求めたい

$63n+30 \geqq 1000$ ← まず4桁…

$63n \geqq 970$

$n \geqq \dfrac{970}{63}$ $\left(15\dfrac{25}{63}\right)$

$\therefore$ $n=16$のときが最小、とわかる。

$N=63\cdot16+30$

$=1038$

次に5の倍数となる最小を見つける。

Nは $63n+30$ であることから

63ごとに次の数があらわれる。

1038に次々63を加えていく

下1ケタに着目

$8+3+3+3+3=20$
①②③④

5の倍数

$\therefore$ 63を4回加えればよさそう

$n=16+4=20$

$N=63\times20+30$

$=1290$

[答] 1290

(3) (A) 119と68の最大公約数を求めよ。

<解説・解答>

$68=2^2\cdot17$

$119=17\cdot7$

[答] 17

(B) $68y-119z=17$ と 整式① をともに満たす x, y, z の組について $M=x+y+z$ とする。M のうち 7進法で表したとき 4桁となるものの中で最大の数を M' とする。M' を10進法で表せ。

<解説・解法>

かなり複雑な解法が求められる。

1つずつ丁寧にやっていこう!

まずは $68y-119z=17$ を解こう。

これは気付いてくれたと思うが、両辺17で割ることができる。

$4y-7z=1$

これを解こう。$(y, z)=(2, 1)$

$$\begin{array}{rl} & 4y-7z=1 \\ -) & 4\cdot2-7\cdot1=1 \\ \hline & 4(y-2)-7(z-1)=0 \end{array}$$

$4(y-2)=7(z-1)$

4, 7は互いに素だから

$\begin{cases} \cdot\ y-2 \text{は} 7 \text{の倍数} \\ \cdot\ z-1 \text{は} 4 \text{の倍数} \end{cases}$

整数 S を用いて

$\begin{cases} \cdot\ y-2=7S \\ \cdot\ z-1=4S \end{cases}$ 変形して

$\begin{cases} \cdot\ y=7S+2 \\ \cdot\ z=4S+1 \end{cases}$

形が同じだぞ!

ここで、(1)より

$\begin{cases} x=9k+3 \\ y=7k+2 \end{cases}$

したがって、x, y, z を統一して k で表すことができる!

$$\begin{cases} x = 9k+3 \\ y = 7k+2 \\ z = 4k+1 \end{cases}$$

$M = x+y+z$ に代入して、

$= 9k+3+7k+2+4k+1$

$= 20k+6$

7進法で表したMを $M_{(7)}$ とする。

これが4桁だから…

$$\boxed{1000_{(7)} \leqq M_{(7)} < 10000_{(7)}}$$

である。これらを10進法で表そう。

7^3の位　7^1の位

$1000_{(7)}$

7^2の位　7^0の位

$\therefore\ 7^3 \times 1 + 7^2 \times 0 + 7^1 \times 0 + 7^0 \times 0$

$= 343$

$10000_{(7)}$

7^4の位　7^3の位　7^2の位　7^1の位　7^0の位

$7^4 \times 1 + 7^3 \times 0 + 7^2 \times 0 + 7^1 \times 0 + 7^0 \times 0$

$= 2401$

$343 \leqq 20k+6 < 2401$

$337 \leqq 20k < 2395$

$16.85 \leqq k < 119.75$

最大のときのkは119

$\therefore\ M' = 20 \cdot 119 + 6$

$= 2386$

[答] 2386.