

[問題]  $a_1=2, a_{n+1}=-2a_n+3$   
 $(n=1, 2, 3, \dots)$  で定めらる  $\{a_n\}$  を  
 次のように群に分ける

$a_1$  |  $a_2, a_3, a_4$  |  $a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$   
 1群      2群                      3群

(1) 第10群に含まれる項の個数を  
 求めよ。

< 解説・解答 >

各群の項数を考えよう

群	1群	2群	3群	4群	...	n群
項数	1	3	5	7	...	?

項数を1つの数列  $\{b_n\}$  と考えよう

$$b_n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

$\{b_n\}$  の初項1, 公差2, 項数

nの等差数列だから...

$$b_n = 1 + (n-1) \cdot 2$$

$$= 1 + 2n - 2$$

$$= \underline{2n - 1}$$

第10群だから  $n=10$  を代入

$$2 \cdot 10 - 1 = \underline{19}$$

[答] 19

(2) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

<解説・解答>

$$a_1 = 2, a_{n+1} = -2a_n + 3$$

この漸化式から  $\{a_n\}$  を解く。

$$a_{n+1} = -2a_n + 3$$

$$\rightarrow \alpha = -2\alpha + 3 \leftarrow \begin{array}{l} \text{特性} \\ \text{方程式} \end{array}$$

$$a_{n+1} - \alpha = -2(a_n - \alpha)$$

$\alpha$  の値は特性方程式を解く

$$3\alpha = 3$$

$$\alpha = 1 \rightarrow \text{特性方程式に代入}$$

$$a_{n+1} - 1 = -2(a_n - 1)$$

数列  $\{a_n - 1\}$  は

$$\begin{cases} \text{初項 } a_1 - 1 = 2 - 1 = 1 \\ \text{公比 } -2 \end{cases}$$

の等比数列である。

$$\therefore a_n - 1 = (-2)^{n-1}$$

$$a_n = (-2)^{n-1} + 1$$

$$[\text{答}] a_n = (-2)^{n-1} + 1$$

(3)  $a_n = -8191$  とある項  $a_n$  は第何群に含まれているか。また、 $a_{2023}$  は第何群の何項目の数か。

< 解説・解答 >

(2) より

$$a_n = (-2)^{n-1} + 1$$

$$(-2)^{n-1} + 1 = -8191$$

$$(-2)^{n-1} = -8192$$

$$(-2)^{n-1} = (-2)^{13}$$

$2^{10} = 1024$  を覚えておこう!

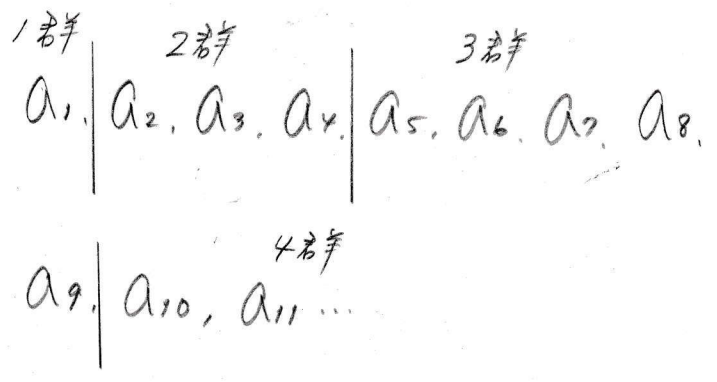
$$n-1 = 13$$

$$\underline{n = 14}$$

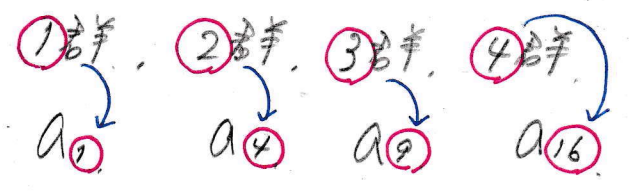
問題文より  $a_{14}$  は第4群に含まれるよ!

∴ 第4群 ... (答)

次に " $a_{2023}$ " について考えよう  
"群" と "項" の関係を考えよう



各群の最後の項を見よう



$a_n$  の  $n$  は...

$$\underline{n = 1, 4, 9, 16, \dots}$$

これは数列

$\{C_n\}$  とすると...

$$\underline{C_n = n^2}$$

$a_{2023}$  を含む群を  $l$  群とすると

$$\underline{C_n = l^2}$$

$$\underline{(l-1)^2 < 2023 \leq l^2}$$

これは解かて。  
 (12前の項の22)

$$\begin{cases} (l-1)^2 < 2023 \\ 2023 \leq l^2 \end{cases}$$

↑ 解答

$$l^2 - 2l + 1 < 2023$$

$$l^2 - 2l < 2022$$

$$(l-2)l < 2022$$

43・45

$$l = 45$$

$$2023 \leq l^2$$

$$l = 45$$

∴ 第45群

次に何項目かを考えよう

45群の最初の項は

$$\leftarrow \text{1つ前の群の最後の項}$$

$$\underline{(n-1)^2 + 1}$$

$$n=45 \text{ を代入し}$$

$$44^2 + 1$$

$$= \underline{1937}$$

45群の最初の項  
 $a_{1937}$

初項 1937, 公差 1 項数  $m$  の  
等差数列 と考え...

$$\underline{2023 = 1937 + (m-1) + 1}$$

$$= 1937 + m - 1$$

$$= 1936 + m$$

$$m = \underline{87} \leftarrow \text{45群の85項目, とはな}$$

87項目

[答]  $a_n = -8191$  は 第4群

$a_{2023}$  は 第45群 87項目

(4) 第k群 (k=2, 3, 4, ...) に含まれる項の平均値を求めよ。

<解説・解答>

平均値

$$= \frac{\text{第k群の項の和}}{\text{項数}}$$

第k群の項の和を求めよう。

$$a_n = (-2)^{n-1} + 1 \quad \text{--- ①}$$

(初項からk群の最後の項までの和)

から、(初項から(k-1)群の最後の

項までの和) を減算することで

求める。

① {a\_n} の初項からk群の最後の

項までの和

(3)より

k群の最後の項 ...  $a_{k^2}$

求めたい和は...

初項1, 公比(-2)  
項数nの等比数列

$$\sum_{n=1}^{k^2} a_n = \sum_{n=1}^{k^2} \left\{ (-2)^{n-1} + 1 \right\}$$

$$= \frac{1 \{ (-2)^{k^2} - 1 \}}{-2 - 1} + k^2$$

$$= -\frac{(-2)^{k^2} - 1}{3} + k^2 \quad \dots \text{①}$$

等比数列の和の公式

初項a, 公比r, 項数nの等比数列の和

$$\frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

② 初項から(k-1)群の最後の項

までの和。

(k-1)群の最後の項 ...  $a_{(k-1)^2}$

求めたい和は...

$$\sum_{n=1}^{(k-1)^2} a_n = \sum_{n=1}^{(k-1)^2} \left\{ (-2)^{n-1} + 1 \right\}$$

$$= \frac{1 \{ (-2)^{(k-1)^2} - 1 \}}{-2 - 1} + (k-1)^2$$

$$= -\frac{(-2)^{(k-1)^2} - 1}{3} + (k-1)^2$$

... ②

① - ②

$$= -\frac{(-2)^{k^2} - 1}{3} + k^2 + \frac{(-2)^{(k-1)^2} - 1}{3} - (k-1)^2$$

$$= \frac{(-2)^{(k-1)^2} - (-2)^{k^2}}{3} + 2k - 1 \quad \dots \textcircled{A}$$

次に(項数)は...

k番目の項  $2k - 1$  ...  $\textcircled{B}$

$\textcircled{A} \div \textcircled{B}$

$$\left\{ \frac{(-2)^{(k-1)^2} - (-2)^{k^2}}{3} + 2k - 1 \right\} \div \underline{(2k-1)}$$

$$= \frac{(-2)^{(k-1)^2} - (-2)^{k^2}}{3(2k-1)} + 1 \quad \dots \textcircled{\frac{1}{3}}$$

$$\left[ \frac{1}{3} \right] \frac{(-2)^{(k-1)^2} - (-2)^{k^2}}{3(2k-1)} + 1$$