[問題] $a_1=2$, $a_{n+1}=-2a_n+3$ $(n=1,2,3\cdots)$ で定められる $\{a_n\}$ を次のような群に分ける

$a_1 \mid a_2, a_3, a_4 \mid a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 \mid$

1群　2群　3群

(1) 第10群に含まれる項の個数を求めよ。

＜解説・解答＞

各群の項数を考えよう

群	1群	2群	3群	4群	…	n群
項数	1	3	5	7	…	?

項数を1つの数列 $\{b_n\}$ と考えよう

$b_n = 1, 3, 5, 7 \cdots$ より

$\{b_n\}$ は初項1, 公差2, 項数 n の等差数列だから…

$$b_n = 1+(n-1)\cdot 2$$
$$= 1+2n-2$$
$$= 2n-1$$

第10群だから、$n=10$ を代入

$2\cdot 10-1=19$

[答] 19

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

<解説・解答>

$a_1=2,\ a_{n+1}=-2a_n+3$

この漸化式から $\{a_n\}$ を解こう。

$$
\begin{array}{rrl}
 & a_{n+1} &= -2a_n+3 \\
-) & \alpha &= -2\alpha+3 \leftarrow \text{特性方程式} \\
\hline
 & a_{n+1}-\alpha &= -2(a_n-\alpha)
\end{array}
$$

α の値は特性方程式を解く

$3\alpha=3$

$\alpha=1$ → 特性方程式に代入

$a_{n+1}-1=-2(a_n-1)$

数列 $\{a_n-1\}$ は
$\begin{cases} \text{初項} & a_1-1=2-1=1 \\ \text{公比} & -2 \end{cases}$
の等比数列である。

よって、$a_n-1=(-2)^{n-1}$

$a_n=(-2)^{n-1}+1$

[答] $a_n=(-2)^{n-1}+1$

(3) $a_n = -8191$ となる項 a_n は第何群に含まれているか。また、a_{2023} は第何群の何項目の数か。

＜解説・解答＞

(2) より

$$a_n = (-2)^{n-1} + 1$$

$$(-2)^{n-1} + 1 = -8191$$

$$(-2)^{n-1} = -8192$$

$$(-2)^{n-1} = (-2)^{13}$$

$2^{10} = 1024$ を覚えておこう！

$$n - 1 = 13$$

$$n = 14$$

問題文より a_{14} は第4群に含まれているね！

∴ 第4群 …答

次に "a_{2023}" について考えよう

"群" と "項" の関係を考える

1群	2群	3群	4群
a_1	a_2, a_3, a_4	a_5, a_6, a_7, a_8, a_9	$a_{10}, a_{11} \cdots$

各群の最後の項を見てみよう

1群，2群，3群，4群

a_1　a_4　a_9　a_{16}

a_n の n は…

$n = 1, 4, 9, 16 \cdots$ これを数列 $\{C_n\}$ とすると…

$$C_n = n^2$$

a_{2023} を含む群を l 群とすると

$$C_n = l^2$$

$$(l-1)^2 < 2023 \leqq l^2$$

1つ前の項のラスト

これを解くと，

$$\begin{cases} (l-1)^2 < 2023 \\ 2023 \leqq l^2 \end{cases}$$

解き方

$l^2 - 2l + 1 < 2023$

$l^2 - 2l < 2022$

$(l-2)l < 2022$

$43 \cdot 45$

$l = 45$

$2023 \leqq l^2$

$l = 45$

∴ 第45群

次に何項目かを考えよう

45群の最初の項は

1つ前の群の最後の項

$(n-1)^2 + 1$

$n=45$ を代入し、

$44^2 + 1$

$= 1937$

45群の最初の項 a_{1937}

初項1937，公差1 項数mの等差数列と考え!!

$2023 = 1937 + (m-1) \cdot 1$

$= 1937 + m - 1$

$= 1936 + m$

$m = 87$ ← 45群の85項目，ということ

87項目

[答] $a_n = -8191$ は第4群

a_{2023} は第45群 87項目

(4) 第k群（$k=2,3,4\cdots$）に含まれる項の平均値を求めよ。

＜解説・解答＞

平均値

＝（第k群の項の和）÷（項数）

第k群の項の和を求めよう。

$a_n=(-2)^{n-1}+1$

（初項からk群の最後の項までの和）①

から、（初項から$(k-1)$群の最後の項までの和）②

を減算することで求める。

① $\{a_n\}$の初項からk群の最後の項までの和

k群の最後の項 … a_{k^2} （(3)より）

求めたい和は…

$$\sum_{n=1}^{k^2} a_n=\sum_{n=1}^{k^2}\left\{(-2)^{n-1}+1\right\}$$

初項1, 公比(−2) 項数nの等比数列

$$=\frac{1\{(-2)^{k^2}-1\}}{-2-1}+k^2$$

$$=-\frac{(-2)^{k^2}-1}{3}+k^2 \quad \cdots ①$$

等比数列の和の公式

初項a, 公比r, 項数nの等比数列の和

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

② 初項から$(k-1)$群の最後の項までの和

$(k-1)$群の最後の項 … $a_{(k-1)^2}$

求めたい和は…

$$\sum_{n=1}^{(k-1)^2} a_n=\sum_{n=1}^{(k-1)^2}\left\{(-2)^{n-1}+1\right\}$$

$$=\frac{1\{(-2)^{(k-1)^2}-1\}}{-2-1}+(k-1)^2$$

$$=-\frac{(-2)^{(k-1)^2}-1}{3}+(k-1)^2 \quad \cdots ②$$

① − ②

$$= -\frac{(-2)^{k^2}-1}{3}+k^2+\frac{(-2)^{(k-1)^2}-1}{3}-(k-1)^2$$

$$= \frac{(-2)^{(k-1)^2}-(-2)^{k^2}}{3}+2k-1 \quad \cdots Ⓐ$$

次に(項数)は…

k群なので $2k-1$ …Ⓑ

Ⓐ ÷ Ⓑ

$$\left\{\frac{(-2)^{(k-1)^2}-(-2)^{k^2}}{3}+2k-1\right\}\div(2k-1)$$

$$= \frac{(-2)^{(k-1)^2}-(-2)^{k^2}}{3(2k-1)}+1 \quad \cdots (答)$$

$$\boxed{[答] \quad \frac{(-2)^{(k-1)^2}-(-2)^{k^2}}{3(2k-1)}+1}$$