[問題] OA=3, OB=2, ∠AOB=60°の△OABにおいて辺ABを3:1に内分する点をP, 辺OBの中点をQ, OPとAQの交点をRとする。

(1) $\overrightarrow{PQ}$を$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$で表せ。

<解説・解答>

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$$

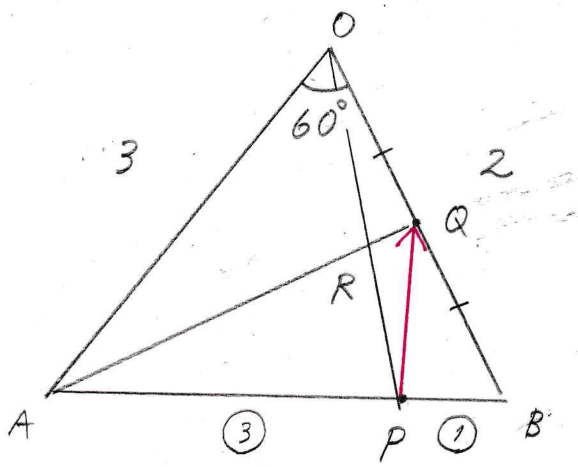
$$=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-\frac{3}{4}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}$$

$$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}\ /\!/$$

[答] $\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$



(2) 線分PQの長さを求めよ。

<解説・解答>

(1)より

$$\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$$

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}\right)^2$$

$$=\frac{1}{16}(\underbrace{|\overrightarrow{OA}|}_{3}{}^2+2\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}_{??}+\underbrace{|\overrightarrow{OB}|}_{2}{}^2)$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB$$

$$=3\cdot2\cdot\underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}}$$

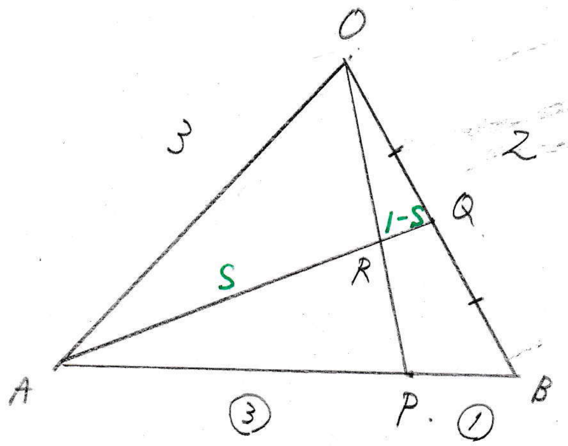
$$=3$$

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=\frac{1}{16}(9+2\cdot3+4)$$

$$=\frac{19}{16}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{19}}{4}$$

[答] $\dfrac{\sqrt{19}}{4}$



(3) OR：RP を求めよ。

＜解説・解答＞

O, R, P は一直線上にあるから

$$\overrightarrow{OR} = k\,\overrightarrow{OP}$$

このkを求めればOKだ！

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{4}$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{k}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}k\,\overrightarrow{OB} \quad \cdots ①$$

次に、△OAQ に着目して、$\overrightarrow{OR}$ を表す。

AR：RQ = S：1−S とおく。

$$\overrightarrow{OR} = (1-S)\overrightarrow{OA} + S\,\overrightarrow{OQ}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OR} = (1-s)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}s\overrightarrow{OB}$$ …②

$\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ より ①と②の係数を比較して、

$$\frac{k}{4} = 1-s$$

$$\frac{3}{4}k = \frac{1}{2}s$$

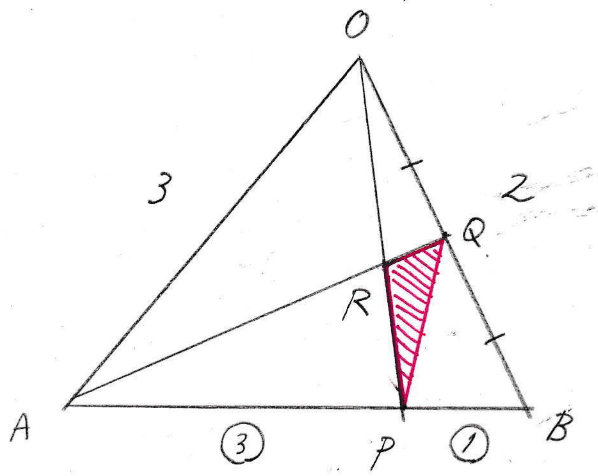
これを解いて

$$s = \frac{6}{7}, \quad k = \frac{4}{7}$$

$$\therefore \overrightarrow{OR} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OP}$$

$\therefore OR : RP = 4 : 3$ //

[答] 4 : 3



(4) △PQRの面積を求めよ。

<解説・解答>

△OABの面積をSとし、
辺の比を使って、面積を求めていく

△OPBの面積を求める。

AP : PB = 3 : 1 より

$$\triangle OPB = \frac{1}{4} \times \triangle OAB$$

$$= \frac{1}{4}S$$

次に、△OPQを求める

OQ : QB = 1 : 1 より

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2}\triangle OPB$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}S$$

$$= \frac{1}{8}S$$

最後に $\triangle PQR$ を求める.

(3)より $OR : RP = 4 : 3$

$$\triangle PQR = \frac{3}{7}\triangle OPQ$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{1}{8}S$$

$$= \frac{3}{56}S$$

Sを求めよう.

$$S = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\triangle PQR = \frac{3}{56} \times \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$= \frac{9}{112}\sqrt{3}$$ //

[答] $\frac{9}{112}\sqrt{3}$