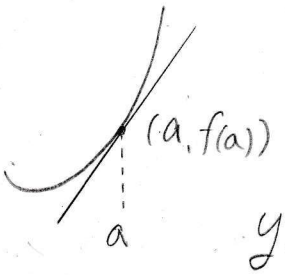
[問題] 関数 $f(x)=2x^3+5x^2+4x$ がある。

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 点 $(0, k)$ から曲線 $y=f(x)$ に引くことができる接線の本数を k の値によって調べよ。

＜解説・解答＞

接線の方程式



$y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$$f(x)=2x^3+5x^2+4x$$

$$f'(x)=6x^2+10x+4$$

$$f'(t)=6t^2+10t+4$$

接線は、

$$y-(2t^3+5t^2+4t)=(6t^2+10t+4)(x-t)$$

$$y=(6t^2+10t+4)x-6t^3-10t^2-4t-2t^3+5t^2+4t$$

$$y=(6t^2+10t+4)x-4t^3-5t^2$$

[答] $y=(6t^2+10t+4)x-4t^3-5t^2$

＜解説・解答＞

(1)より $(t, f(t))$ における接線は、

$$y=(6t^2-10t+4)x-4t^3-5t^2$$

この直線が $(0, k)$ を通るから、

式入!

$$k=(6t^2-10t+4)\times 0-4t^3-5t^2$$

$$k=-4t^3-5t^2 \quad \cdots ①$$

接線の本数 = 接点の数である。

接点の数を考えてみよう。

①の式の意味を考えてみよう

- $y=f(x)$ の $(t, f(t))$ における接線
- $(0, k)$ を通る

これらの条件を全て満たした式である。

この式が「実数解」を持てば、その接線は存在する、ということになる。

そして、それをもう少し発展させて考えると

…

$\boxed{\text{① 式の実数解 = 接点の x 座標}}$

ということができる。

では、その実数解の個数を調べれば、接線の本数を理解することができる。

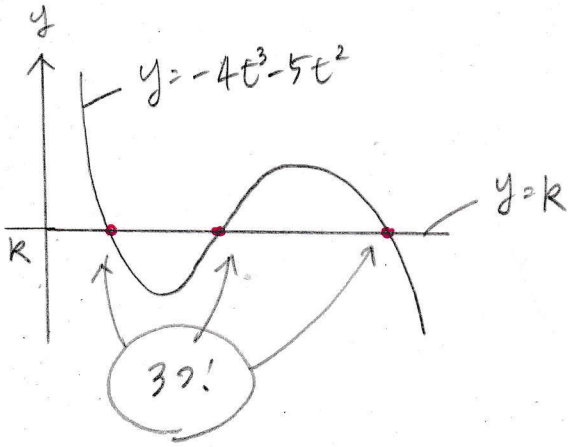
では、① 式の実数解の個数を調べよう。

$$k = -4t^3 - 5t^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = k \\ y = -4t^3 - 5t^2 \end{array}}$$

と2つの関数に分け、これらの交点の個数 = 実数解の個数、と考えることができる！



では、$y = -4t^3 - 5t^2$ のグラフを書こう。

$y' = -12t^2 - 10t > 0$ とおくと

$$t(6t+5) < 0$$

$\therefore$ y' は $-\frac{5}{6} < t < 0$ のとき、⊕

t	$\cdots$	$-\frac{5}{6}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	$-\frac{125}{108}$	↗	0	↘

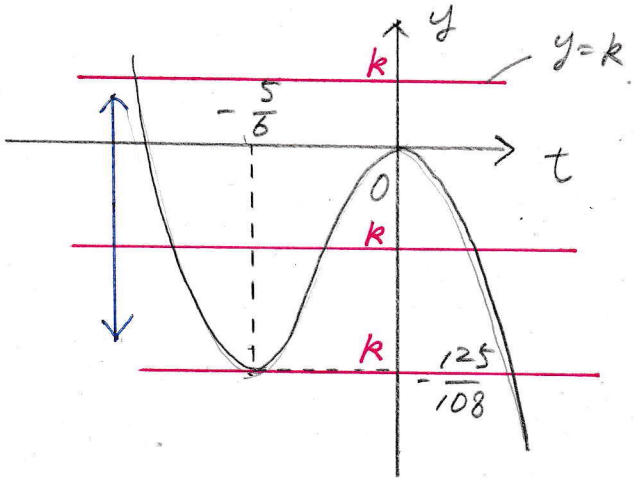
$$f\left(-\frac{5}{6}\right) = -4\left(-\frac{5}{6}\right)^3 - 5\left(-\frac{5}{6}\right)^2$$

$$= -4 \cdot \left(-\frac{125}{216}\right) - 5 \cdot \frac{25}{36}$$

$$= \frac{500}{216} - \frac{125}{36}$$

$$= \frac{500 - 750}{216}$$

$$= -\frac{250}{216} = -\frac{125}{108}$$



① $k>0$ のとき　1個

② $k=0$ のとき　2個

③ $-\frac{125}{108}<k<0$ のとき　3個

④ $k=-\frac{125}{108}$ のとき　2個

⑤ $k<-\frac{125}{108}$ のとき　1個

接線の数は…

$k<-\frac{125}{108}$, $0<k$ のとき　1本

$k=-\frac{125}{108}$, $k=0$ のとき　2本

$-\frac{125}{108}<k<0$ のとき　3本

(3) $g(x)=8x^2+16x-a$ (aは定数) がある。$-3\leqq x\leqq 3$ の範囲の、任意のxに対して、常に $f(x)\geqq g(x)$ となるためのaの値の範囲を求めよ。

<解説・解答>

$f(x)\geqq g(x)$ より

$$f(x)-g(x)\geqq 0$$

$f(x)=2x^3+5x^2+4x$

$g(x)=8x^2+16x-a$

$f(x)-g(x)$

$=2x^3+5x^2+4x-8x^2-16x+a\geqq 0$

$2x^3-3x^2-12x+a\geqq 0$

この式が $-3\leqq x\leqq 3$ で常に成り立てばよい。

$h(x)=2x^3-3x^2-12x+a$ とおく。

このグラフを書き、$-3\leqq x\leqq 3$ の範囲で 最小値 $\geqq 0$ となればよい

$h'(x)=6x^2-6x-12>0$ とおく.

$x^2-x-2>0$

$(x-2)(x+1)>0$.

$h(x)$ は $x<-1,\ 2<x$ のとき ⊕

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	↘	$+$	0	$-$	0	$+$	↘
$f(x)$	$a-45$	↗	$a-5$	↘	$a-20$	↗	$a-9$

$h(-1)=2\times(-1)^3-3\cdot(-1)^2-12\cdot(-1)+a$

$=-2-3+12+a$

$=a-5$

$h(2)=2\cdot2^3-3\cdot2^2-12\cdot2+a$

$=16-12-24+a$

$=a-20$.

$h(-3)=2\times(-3)^3-3\cdot(-3)^2-12\cdot(-3)+a$

$=-54-27+36+a$

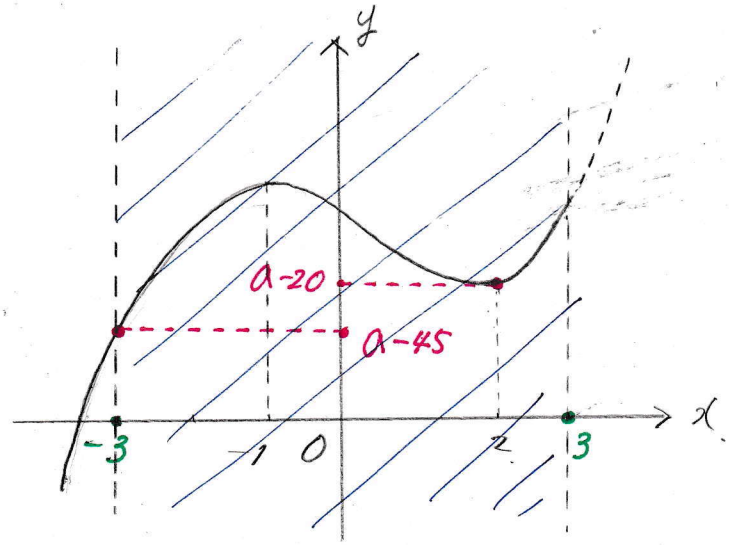
$=a-45$

$h(3)=2\cdot3^3-3\cdot3^2-12\cdot3+a$

$=54-27-36+a$

$=a-9$

$a-45<a-20$ であるから…



最小値は $x=-3$ のとき, $a-45$ である。

したがって, $-3\leqq x\leqq 3$ において $f(x)-g(x)\geqq 0$ が常に成り立つための a の値の範囲は,

$a-45\geqq 0$

$a\geqq 45$

[答] $a\geqq 45$.