[問題] 実数xに対して、$t=2^x+2^{-x}$, $y=4^x-6\cdot2^x-6\cdot2^{-x}+4^{-x}$ とおく。

(1) xが実数全体を動くとき、tの最小値とそのときのxを求めよ。

〈解説・解答〉

$t=2^x+2^{-x}$ の最小値を求める。

「最小値を求める」場合…

① 2次関数の形に持ち込む

② (相加平均) ≧ (相乗平均)

②を用いよう

(相加平均) ≧ (相乗平均)

$a>0$, $b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{a\cdot b}$$

等号成立は $a=b$ のとき

記述を忘れずに!

$2^x>0$, $2^{-x}>0$ だから

(相加平均) ≧ (相乗平均) を用いて

$$2^x+2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}$$

$$=2\sqrt{2^{x-x}}$$

$$=2\sqrt{2^0}$$

$$=2$$

$t=2^x+2^{-x} \geqq 2$

よって、tの最小値は 2

等号が成立するのは $2^x=2^{-x}$ のとき

$x=-x$

$x=0$

[答] 最小値 2

そのときの x は 0

(2) yをtの式で表せ。

＜解説・解答＞

$y = 4^x \underbrace{- 6\cdot 2^x - 6\cdot 2^{-x}}_{= -6(2^x+2^{-x}) = -6t} + 4^{-x}$

$4^x + 4^{-x}$をtを用いて表そう

$t = 2^x + 2^{-x}$の両辺を2乗しよう

$t^2 = (2^x + 2^{-x})^2$

$= (2^x)^2 + 2\cdot 2^x \cdot 2^{-x} + (2^{-x})^2$

$= (2^2)^x + 2\cdot 2^{x-x} + (2^2)^{-x}$

$= 4^x + 2 + 4^{-x}$

$= 4^x + 4^{-x} + 2$

$\therefore\ 4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$

$y = t^2 - 2 - 6t$

$= t^2 - 6t - 2$

$\boxed{[答]\ y = t^2 - 6t - 2}$

(3) x が実数全体を動くとき
y の最小値とそのときの x を求めよ。

<解説・解答>

(2)より

$$y=t^2-6t-2$$

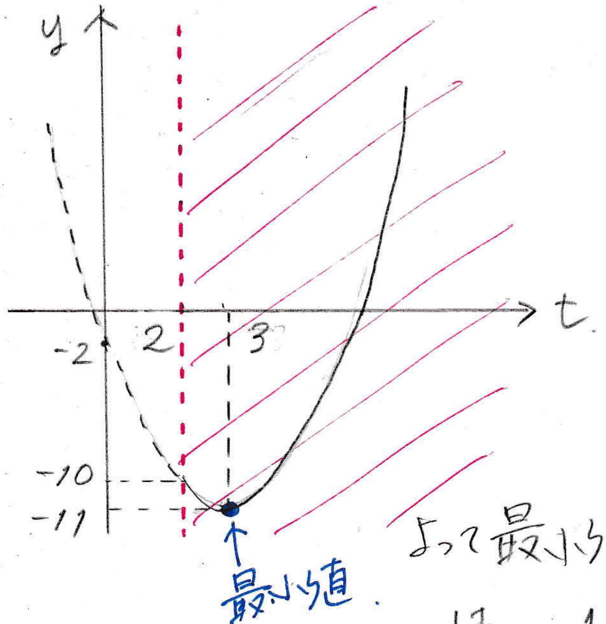
(1)より

$$t \geqq 2$$

重要!

これらを使って、最小値を求めよう

$$y=t^2-6t-2$$
$$=(t^2-6t+9-9)-2$$
$$=(t-3)^2-11$$



よって最小値は -11

そのときの x を求めよう

最小値 -11 を示すのは

$t=3$ のとき

$$t=2^x+2^{-x}=3$$

両辺に 2^x をかけよう

$$(2^x)^2+2^{-x}\cdot 2^x=3\cdot 2^x$$

$$(2^x)^2-3\cdot 2^x+1=0$$

2^x の2次関数と考えよう

解の公式より

$$2^x=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}$$

$$2^x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

対数の性質
$a^b=M$
$\Downarrow$
$b=\log_a M$

対数の性質

$$x=\log_2\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right) \quad \cdots ①$$

$$=\log_2(3\pm\sqrt{5})-\log_2 2$$

$$=\log_2(3\pm\sqrt{5})-1$$

[答] 最小値 -11
$x=\log_2(3\pm\sqrt{5})-1$ ①の形でも可

(4) aを実数とするとき、$y=a$となるようなxの個数を求めよ。

＜解説・解答＞

$y=t^2-6t-2$

$t=2^x+2^{-x}$

$t \geqq 2$

$y=a$となるようなxの個数を求める。

「解の個数」系問題だ。

$y=t^2-6t-2$と$y=a$との交点の個数を調べる

$\Downarrow$

aの値によってtの個数を求める …①

$\Downarrow$

$t=2^x+2^{-x}$からtの値とxの個数の関係を調べる …②

①と②を照らし合わせ、

aの値とxの個数の関係を調べる

先に②から行う。

$t=2^x+2^{-x}$　両辺に2^xをかける

$t\cdot 2^x=(2^x)^2+2^{-x}\cdot 2^x$

$t\cdot 2^x=(2^x)^2+1$

$(2^x)^2-t\cdot 2^x+1=0$

2^xの2次関数とする

$$2^x=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$$

$$x=\log_2\left(\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}\right)$$

$$=\log_2(t\pm\sqrt{t^2-4})-\log_2 2$$

$$=\log_2(t\pm\sqrt{t^2-4})-1$$

$t\pm\sqrt{t^2-4}>0$より真数条件は満たす。($t\geqq 2$より)

tの値によるxの個数を考えよう

$t\geqq 2$より

$t=2$のとき　$t\pm\sqrt{4-4}=t$

$\log_2 t-1$だから…

xの個数は1つ

$\log_2(t\pm\sqrt{t^2-4})$だから…

$t>2$のとき　$t\pm\sqrt{t^2-4}$ ∴ xは2つ

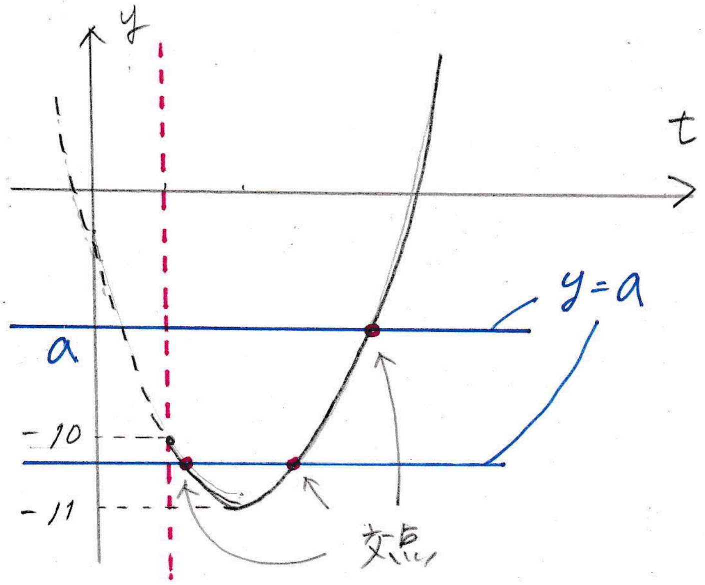
tとxの個数の関係

t=2のとき、xは1つ

t>2のとき、xは2つ

次に、$y=t^2-6t-2$ と $y=a$ から、aとtの関係を考える

$y=(t-3)^2-11$



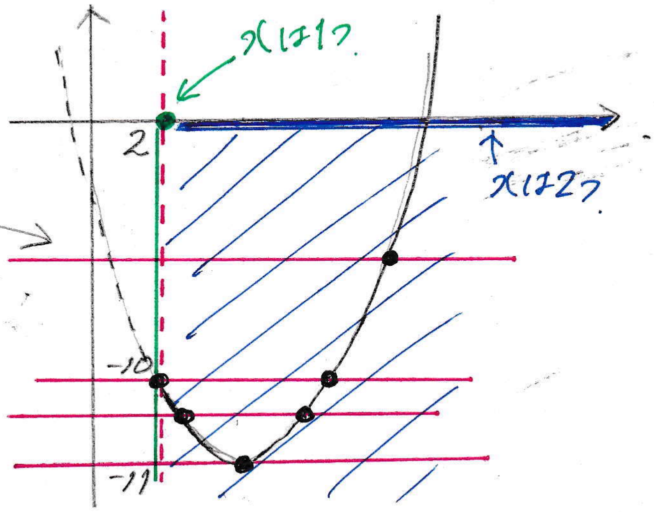
a=-11のとき tの個数1つ

-11<a<-10のとき tの 〃 2つ

a>-10のとき 〃 1つ

a<-11のとき 〃 0こ

上記のグラフに、tとxの個数の関係のグラフを書き込もう



a<-11のとき xは0こ

a=-11のとき tは1つ

xは2つ

1×2=2こ

-11<a<-10のとき tは2つ

xは2つ

2×2=4こ

a=-10のとき tは2つ

t=2のとき xは1つ

t>2のとき xは2つ

1×1+1×2=3こ

a>-10のとき tは1つ

xは2つ

1×2=2こ

[答] $a < -11$ のとき 0 個

$a = -11$, $a > -10$ のとき 2 個

$a = -10$ のとき 3 個

$-11 < a < -10$ のとき 4 個