[問題] $f(x)=1-x^2$とし、曲線$y=f(x)$上の点$P(a, f(a))$は、$\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{3}{2}$の範囲で動くものとする。原点と点Pの2点を通る直線をl、点Pにおける$y=f(x)$の接線をmとする。

(1) 2直線lとmの方程式を求めよ。

<解説・解答>

まずlから求めよう。

lは原点と点$P(a, f(a))$を通るから…

$\boxed{f(a)=1-a^2}$ より

$\Downarrow$

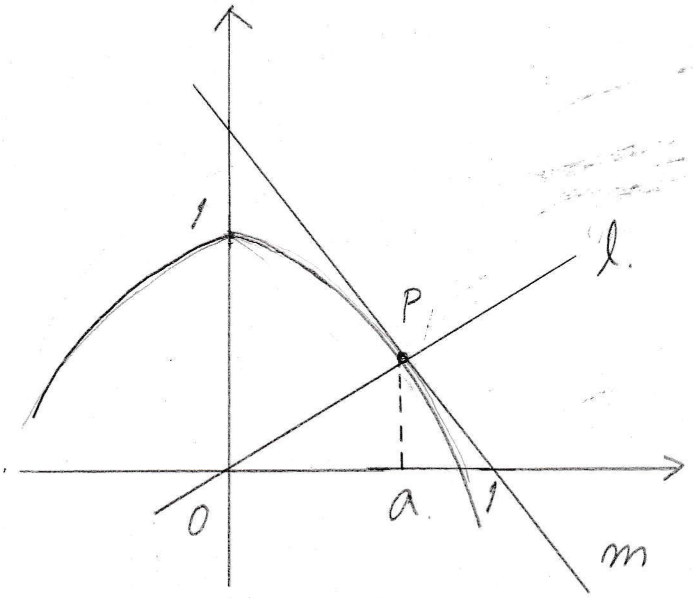
$P(a, 1-a^2)$

$$y-(1-a^2)=\frac{1-a^2}{a}(x-a)$$

傾き $\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$

$(0,0) \to (a, 1-a^2)$

また、$a \neq 0$より



$$y=\frac{1-a^2}{a}x-1+a^2+1-a^2$$

$$=\frac{1-a^2}{a}x \quad \cdots(\text{答})$$

次に、mを求めよう。

接線の公式

$y=f(x)$の$(a, f(a))$における接線は、

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$y=1-x^2$の$P(a, 1-a^2)$における接線は… $f(x)=1-x^2$とおく

$f(a)=1-a^2$

$f'(x)=-2x$ より $f'(a)=-2a$

$$y-(1-a^2)=-2a(x-a)$$

$$y=-2ax+2a^2+1-a^2$$

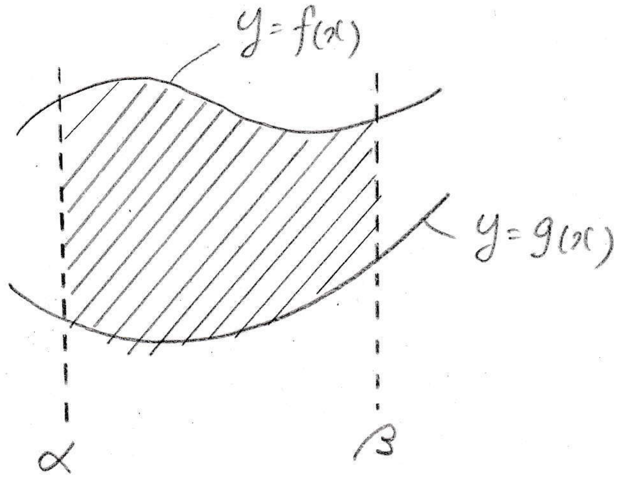
$$=\underline{\underline{-2ax+a^2+1}}$$

…(答)2

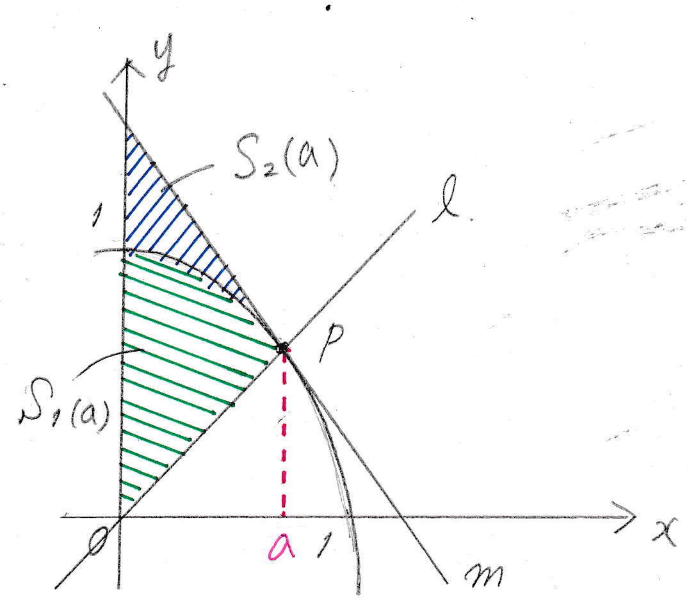
［答］l は $y=\dfrac{1-a^2}{a}x$

m は $y=-2ax+a^2+1$

曲線間の面積



$$\int_\alpha^\beta f(x)-g(x)\,dx$$



(2) $x\geqq 0$ であるとする。y軸と曲線 $y=f(x)$ および直線 l で囲まれた図形の面積を $S_1(a)$ とし、y軸と曲線 $y=f(x)$ および直線 m で囲まれた図形の面積を $S_2(a)$ とする。$S_1(a)$ と $S_2(a)$ を a を用いて表せ。

<解説・解答>

$S_1(a)$ を求めよう

$y=1-x^2$ と $y=\dfrac{1-a^2}{a}x$ の間の面積 $(0\to a)$

$$\int_0^a\left(1-x^2-\frac{1-a^2}{a}x\right)dx$$

$$=-\int_0^a\left(x^2+\frac{1-a^2}{a}x-1\right)dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{1-a^2}{2a}x^2 - x\right]_0^a$$

$$= -\left\{\frac{1}{3}(a^3-0^3) + \frac{1-a^2}{2a}(a^2-0^2) - (a-0)\right\}$$

$$= -\left(\frac{1}{3}a^3 + \frac{(1-a^2)\cdot a^2}{2a} - a\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{3}a^3 + \frac{a-a^3}{2} - a\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{3}a^3 + \frac{a}{2} - \frac{a^3}{2} - a\right)$$

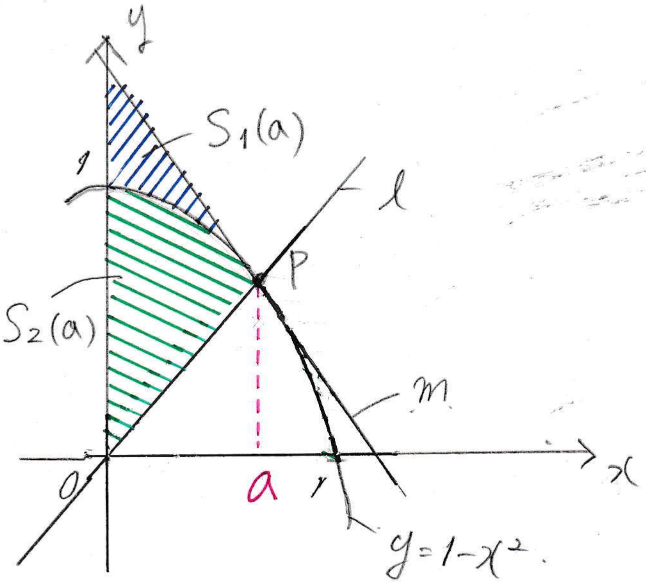
$$= -\left(-\frac{a^3}{6} - \frac{a}{2}\right)$$

$$= \frac{a^3}{6} + \frac{a}{2} \quad \cdots S_1(a)$$

次に $S_2(a)$ を求めよう

$y = -2ax + a^2 + 1$ と $y = 1 - x^2$ の

間の面積 $(0 \to a)$



$$\int_0^a (-2ax + a^2 + 1 - 1 + x^2)\,dx$$

$$= \int_0^a (x^2 - 2ax + a^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - ax^2 + a^2x\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{3}(a^3-0^3) - a(a^2-0^2) + a^2(a-0)$$

$$= \frac{1}{3}a^3 - a^3 + a^3$$

$$= \frac{1}{3}a^3 \quad \cdots S_2(a)$$

[答] $S_1(a) = \dfrac{a^3}{6} + \dfrac{a}{2}$

$S_2(a) = \dfrac{a^3}{3}$

(3) $S_1(a)=2S_2(a)$ を満たす a の値を求めよ。

＜解説・解答＞

(2)より

$$S_1(a)=\frac{a^3}{6}+\frac{a}{2}$$
$$S_2(a)=\frac{a^3}{3}$$

$S_1(a)=2S_2(a)$ より

$$\frac{a^3}{6}+\frac{a}{2}=\frac{2}{3}a^3$$

$$a^3+3a=4a^3$$

$$3a^3-3a=0$$

$$a(a+1)(a-1)=0$$

$$a=-1,\ 0,\ 1$$

$\frac{1}{2}\leqq a\leqq\frac{3}{2}$ より $a=1$

[答] $a=1$

(4) $S_1(a)-S_2(a)$ の最大値を求めよ。また、そのときの a の値を求めよ。

＜解説・解答＞

$$S_1(a)-S_2(a)$$
$$=\frac{a^3}{6}+\frac{a}{2}-\frac{a^3}{3}$$
$$=-\frac{a^3}{6}+\frac{a}{2}=g(a)$$ とおく

$\frac{1}{2}\leqq a\leqq\frac{3}{2}$ における $g(a)$ の最小値を求めよう

$$g(a)=-\frac{a^3}{6}+\frac{a}{2}$$

増減表を考えよう

$$g'(a)=-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}$$

$-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}>0$ とおく

$$a^2-1<0$$

$$(a+1)(a-1)<0$$

$g'(a)>0$ は $-1<a<1$ である

$-1<a<1$ だから、+

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$g'(a)$	＼	$+$	0	$-$	＼
$g(a)$	①	$\nearrow$	②	$\searrow$	③

①
$$g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{48}+\frac{1}{4}$$
$$=\underline{\frac{11}{48}}$$

②
$$g(1)=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$$
$$=\underline{\frac{1}{3}} \leftarrow \text{最大値}$$

③
$$g\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{27}{48}+\frac{3}{4}$$
$$=\underline{\frac{3}{16}} \leftarrow \text{最小値}$$

［答］ 最大値　$a=1$ のとき　$\frac{1}{3}$

最小値　$a=\frac{3}{2}$ のとき　$\frac{3}{16}$