[問題] 公比 r の等比数列

$\{a_n\}$ に対して、

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$T_n = a_1 + 2a_3 + 3a_5 + \cdots + n\,a_{2n-1}$

とおく。

$a_2 = 6$, $a_5 = 162$ であるとする。

(1) a_1, r の値を求めよ。

<解説・解答>

$$\boxed{\begin{aligned} a_2 &= 6, \\ a_5 &= 162 \end{aligned}}$$

を利用する。

$\{a_n\}$ は等比数列であるから、

$$a \cdot r^{n-1}$$

とおくことができる。(a は初項)

$$\boxed{\begin{aligned} a_2 &= a \cdot r = 6 \quad \cdots ① \\ a_5 &= a r^4 = 162 \quad \cdots ② \end{aligned}}$$

② $a \cdot r^4 = \underbrace{a \cdot r}_{} \cdot r^3 = 162$

① を代入

$6 \cdot r^3 = 162$

$r^3 = 27$

$r = 3$ → ① に代入

$a \cdot r = 6$

$3a = 6$

$a = 2$

$\boxed{[答]\ a = 2,\ r = 3}$ (各3点)

(2) S_n, T_n の値を求めよ。

＜解説・解答＞

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$\{a_n\}$ は

初項 2, 公比 3, 項数 n

の等比数列 だから…

等比数列の和の公式

初項 a, 公比 r, 項数 n の

等比数列の和

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_n = \frac{2(3^n-1)}{3-1}$$

$$= 3^n - 1 \quad \cdots(答)$$

次に T_n を求める.

$T_n = a_1 + 2a_3 + 3a_5 + \cdots + n\,a_{2n-1}$

$a_1 = 2 = 2\cdot 1 = 2\cdot 9^0$

$a_3 = 2\cdot 3^2 = 2\cdot 9 = 2\cdot 9^1$

$a_5 = 2\cdot 3^4 = 2\cdot 81 = 2\cdot 9^2$

$\vdots$

$a_{2n-1} = 2\cdot 3^{2n-1-1} = 2\cdot 3^{2n-2}$

$= 2\cdot 3^{2(n-1)}$

$= 2\cdot 9^{n-1}$

$T_n = 1\cdot 2\cdot 9^0 + 2\cdot 2\cdot 9^1 + 3\cdot 2\cdot 9^2$

$\cdots + n\cdot 2\cdot 9^{n-1}$

T_n は, $n\cdot 2\cdot 9^{n-1}$ の 和.

↓

1, 2, 3, 4, …, n の等差数列

$2\cdot 9^0$, $2\cdot 9^1$, $2\cdot 9^2$ … $2\cdot 9^{n-1}$ の等比数列

(等差数列)×(等比数列)の和

である.

(等差数列)×(等比数列)の和の解法

$$\underline{T_n - r\cdot T_n}$$

↑ 等比数列の公比

$$T_n = 1\cdot 2\cdot 9^0 + 2\cdot 2\cdot 9^1 + 3\cdot 2\cdot 9^2 + \cdots + (n-1)\cdot 2\cdot 9^{n-2} + n\cdot 2\cdot 9^{n-1}$$

$$9T_n = \quad 1\cdot 2\cdot 9^1 + 2\cdot 2\cdot 9^2 + \cdots + (n-1)\cdot 2\cdot 9^{n-1} + n\cdot 2\cdot 9^n$$

$$-8\cdot T_n = 1\cdot 2\cdot 9^0 + 1\cdot 2\cdot 9^1 + 1\cdot 2\cdot 9^2 + \cdots + 1\cdot 2\cdot 9^{n-1} - n\cdot 2\cdot 9^n$$

$$= 2\cdot(\underline{9^0 + 9^1 + 9^2 + \cdots + 9^{n-1}}) - n\cdot 2\cdot 9^n$$

↳ 初項1, 公比9, 項数nの等比数列の和

$$= 2\cdot \frac{9^n - 1}{9-1} - n\cdot 2\cdot 9^n$$

$$= \frac{9^n - 1}{4} - 2n\cdot 9^n$$

$$-8T_n = \left(\frac{1}{4} - 2n\right)9^n - \frac{1}{4}$$

$$T_n = \left(\frac{n}{4} - \frac{1}{32}\right)9^n + \frac{1}{32} \quad \cdots(答)_2$$

[答] $S_n = 3^n - 1$ (4点)

$$T_n = \left(\frac{n}{4} - \frac{1}{32}\right)9^n + \frac{1}{32}$$

(10点)