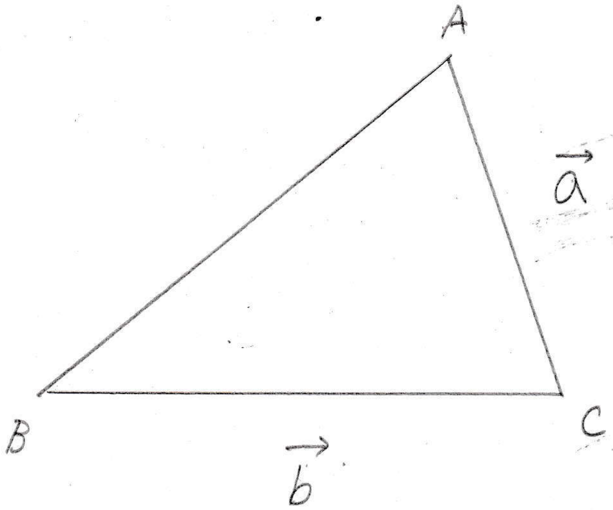
[問題] △ABCにおいて、$\overrightarrow{CA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{CB}=\vec{b}$とする。$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 線分ABの長さを求めよ。



＜解説、解答＞

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$$

終点－始点

$$=\vec{b}-\vec{a}$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2=(\vec{b}-\vec{a})^2$$

$$=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$$

$$=2^2-2\cdot\frac{1}{2}+1^2$$

$$=4-1+1$$

$$=4$$

ベクトルの性質

$$(\vec{b})^2=\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2$$

$|\overrightarrow{AB}|=2$ //

$\boxed{\text{[答] ABの長さ　2}}$

(2) 点Iを△ABCの内心とするとき、$\overrightarrow{BI}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて表せ。

<解説・解答>

$\overrightarrow{BI}$を求めるためには、

$AI : IE$

を求めたい。

右の2つの性質を用いて、
△BAEに着目して、BIは∠Bの二等分線より

$AI : IE = BA : BE$ …①

となる。

BEの長さを求めよう。

同様に、
△ABCに着目、AEは∠Aの二等分線より

$BE : CE = AB : AC$

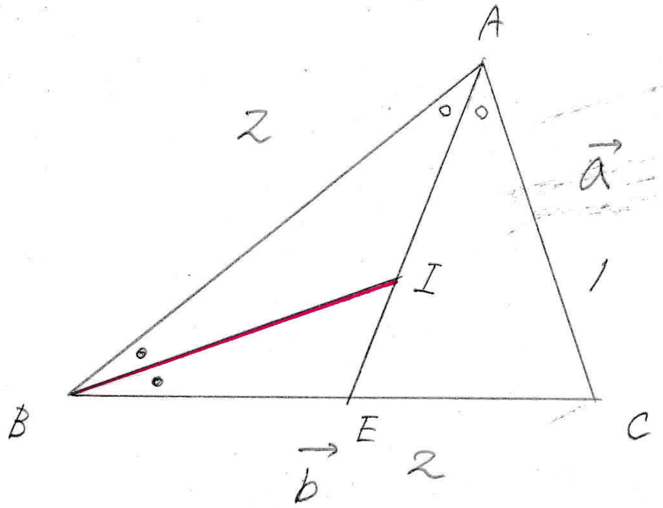
だから

$= 2 : 1$

よって、$BE = \frac{2}{3} \times BC$

$= \frac{2}{3} \times 2$

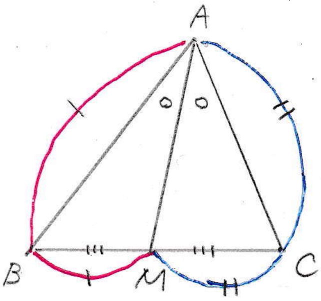
$= \frac{4}{3}$



内心(=内接円の中心)の性質

三角形のそれぞれの角から、内心Iに引いた直線AI, BI, CIは、それぞれ∠A, ∠B, ∠Cの二等分線となる。

三角形の内角の二等分線の性質



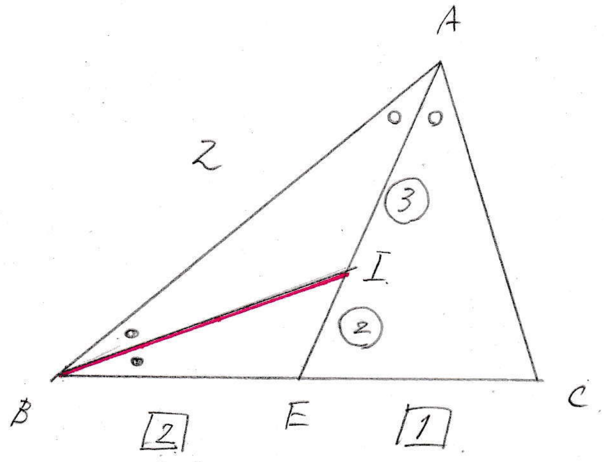
$AB : AC$
$= BM : CM$

∴ $BE = \frac{4}{3}$ を①に代入し、

$AI : IE = 2 : \frac{4}{3}$

$= 6 : 4$

$= 3 : 2$



△BAEに着目して $\overrightarrow{BI}$ を

求めよう。

$$\overrightarrow{BI} = \frac{2\overset{①}{\overrightarrow{BA}} + 3\overset{②}{\overrightarrow{BE}}}{3+2}$$

① $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$

$= \vec{a} - \vec{b}$

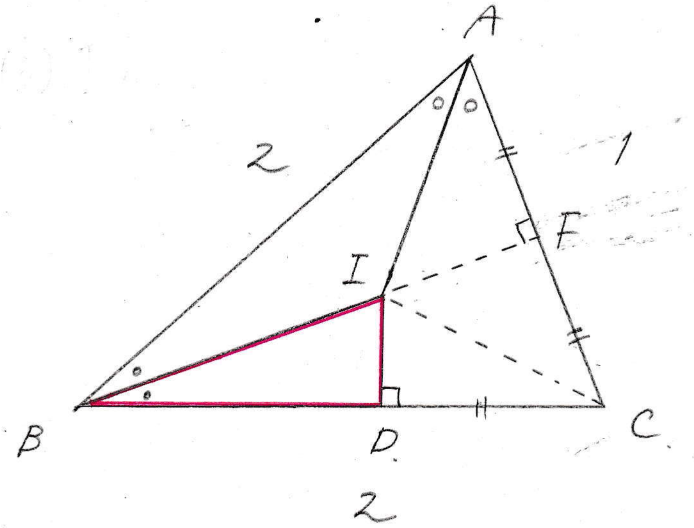
② $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$= -\frac{2}{3}\vec{b}$

$$\overrightarrow{BI} = \frac{2}{5}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{3}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\vec{b}\right)$$

$$= \frac{2}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$$

[答] $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$



(3) IからBCに下ろした垂線の脚をDとする。△BIDの面積を求めよ。

＜解説・解答＞

方針！

△BIDの面積

$$= \frac{1}{2} \times \underbrace{BD}_{①\ 底辺} \times \underbrace{ID}_{②\ 高さ}$$

① BDの長さを求めよう。

理由を考えよう

△CID≡△CIF であるから、

CD = CF.

・△BACはBA=BC=2の二等辺三角形

・BI(BF)は∠Bの二等分線

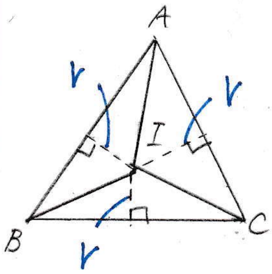
であるから、$AF = CF = \frac{1}{2} = CD$

$$BD = BC - CD$$
$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdots ①$$

② IDは△ABCの内接円の半径.

内接円の半径の求め方

重要解法!



内接円の半径をr. △ABCの面積をSとする

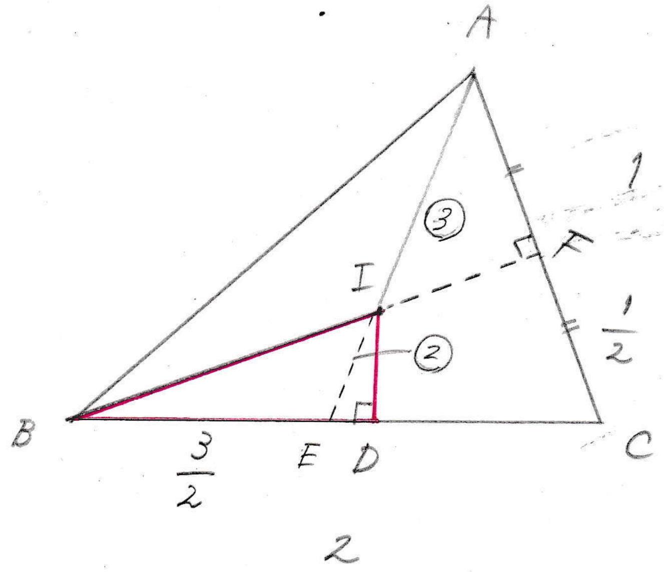
$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (AB + BC + CA)$$

S = △IAC + △IBC + △IAB の面積としてもとめる

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (2 + 1 + 2)$$
$$= \frac{5}{2} r \cdots あ$$

Sを求めよう

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \times BF$$
$$BF = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{15}}{2}$$



$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{15}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{15}}{4}$$ → あに代入

$$\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{5}{2} r$$
$$r = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{2}{5}$$
$$= \frac{\sqrt{15}}{10} = ID \cdots ②$$

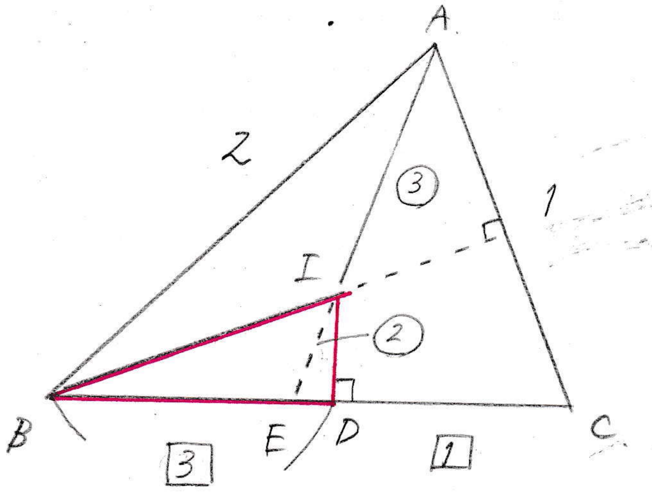
△BIDの面積

$$= \frac{1}{2} \times \underset{BD}{\frac{3}{2}} \times \underset{ID}{\frac{\sqrt{15}}{10}}$$
$$= \frac{3\sqrt{15}}{40} \cdots (答)$$

〈別解〉

△ABCの面積をTとする

$$S = T \times \underbrace{(\text{底辺比})}_{①} \times \underbrace{(\text{高さ比})}_{②}$$



① 底辺比を求めよう

$$BD : DC = \frac{3}{2} : \frac{1}{2}$$

$$= 3 : 1 \text{ より}$$

$$BC : BD = 4 : 3$$

$$BD = \frac{3}{4} BC$$

よって、Sの底辺はTの底辺の $\frac{3}{4}$ 倍

② 高さ比を考えよう

$$AI : IE = 3 : 2 \text{ より}$$

$$AE : IE = 5 : 3$$

$$IE = \frac{2}{5} AE$$

よって、Sの高さはTの高さの $\frac{2}{5}$ 倍

$$S = \underbrace{T}_{\frac{\sqrt{15}}{4}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{3}{\cancel{4}_{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{5}$$

$$= \frac{3\sqrt{15}}{40}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{[答]\ \frac{3\sqrt{15}}{40}}$