[問題] 四面体OABCとその内部の点Pがあり，

$$2\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{AP}+5\overrightarrow{BP}+7\overrightarrow{CP}=\vec{0}$$

を満たしている。

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$，$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$

とする。

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{p}$，$\vec{a}$ で表せ。

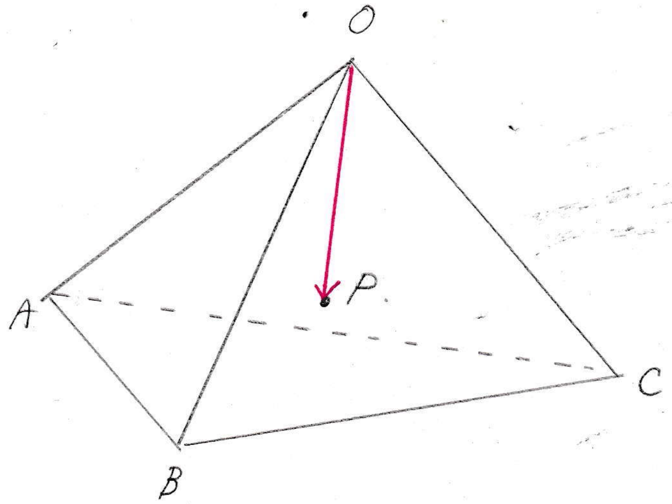
＜解説，解答＞

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$$

終点のベクトル − 始点のベクトル

$$=\vec{p}-\vec{a}$$

[答] $\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$



(2) $\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

＜解説，解答＞

与式をうまいこと変形して，答えに持ち込もう。

$$2\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{AP}+5\overrightarrow{BP}+7\overrightarrow{CP}=\vec{0}$$

$\vec{p}$

(1)の変形を参考に変形しよう

点Oを始点にしたベクトルに変形！

$$2\overrightarrow{OP}+3(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})+5(\underbrace{\overrightarrow{OP}}_{\vec{p}}-\underbrace{\overrightarrow{OB}}_{\vec{b}})$$

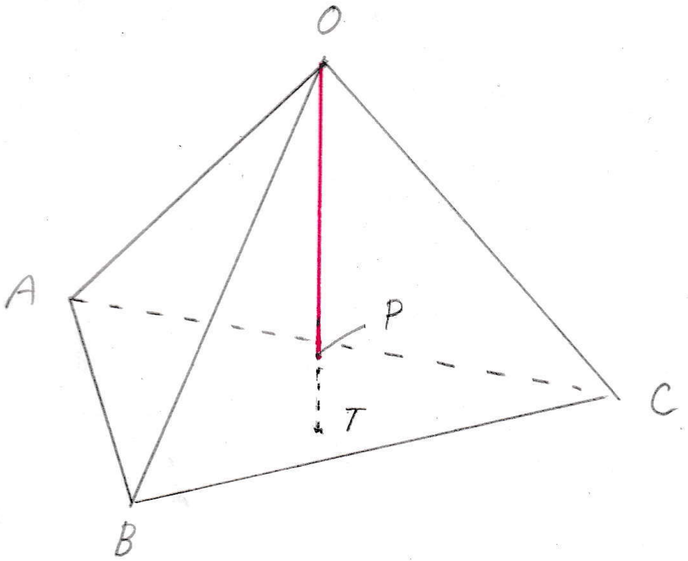
$$+7(\underbrace{\overrightarrow{OP}}_{\vec{p}}-\underbrace{\overrightarrow{OC}}_{\vec{c}})=\vec{0}$$

$$2\vec{p}+3\vec{p}-3\vec{a}+5\vec{p}-5\vec{b}+7\vec{p}-7\vec{c}=\vec{0}$$

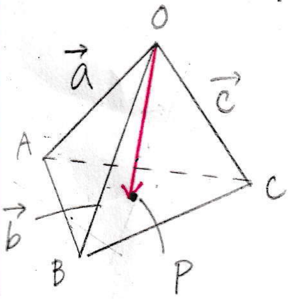
$$17\vec{p}=3\vec{a}+5\vec{b}+7\vec{c}$$

$$\vec{p}=\frac{3\vec{a}+5\vec{b}+7\vec{c}}{17}$$

[答] $\vec{p} = \dfrac{3\vec{a}+5\vec{b}+7\vec{c}}{17}$



共面条件



Pが面ABC上にあるとき、

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + u\overrightarrow{OC}$

$s+t+u=1$

となる s, t, u が存在する。

(3) 直線OPと底面ABCとの交点をTとするとき、$\overrightarrow{OT}$ を $\vec{p}$ で表せ。

〈解説・解答〉

T は △ABC 上にある。

$$\vec{p} = \frac{3\vec{a}+5\vec{b}+7\vec{c}}{17}$$

⇑

共面条件に合うように変形する。

$$= \frac{\bigcirc}{17}\cdot\frac{3\vec{a}+5\vec{b}+7\vec{c}}{\bigcirc}$$

$\bigcirc$ には、$3+5+7=15$ なぜ??

を入れよう

$$\vec{p} = \frac{15}{17}\cdot\frac{3\vec{a}+5\vec{b}+7\vec{c}}{15}$$

$\overrightarrow{OT}$

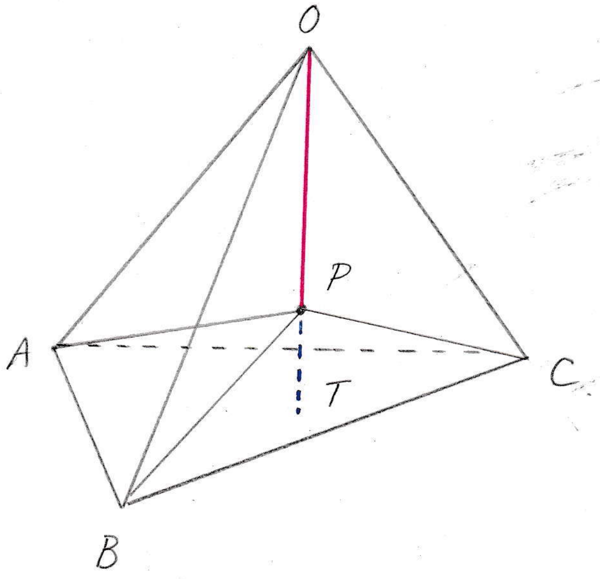
$\dfrac{3}{15}+\dfrac{5}{15}+\dfrac{7}{15}=1$

となるから

$$\vec{p} = \frac{15}{17}\overrightarrow{OT}$$

$$\overrightarrow{OT} = \frac{17}{15}\vec{p}$$

[答] $\overrightarrow{OT} = \dfrac{17}{15}\vec{p}$



(4) 四面体PABC, PBCO, PCOA, POABの体積比を最も簡単な整数比で表せ.

<解説・解答>

考え方

これは発想がとても難しい…

だが, (3)で導いたことを利用すればよいことがわかる.

4つの四面体の体積…といっても, 四面体の表面積は, どれも求めることができない! ⇒ そこで発想の転換だ!

元となる四面体OABCの体積をVとおき, 各四面体の体積を

それぞれ V を用いて表すことで

体積比を求めるのだ！

このとき、(3)で求めた値が

利用できる。

① 四面体PABCで見てみよう

(3)より $\overrightarrow{OT} = \frac{17}{15}\vec{p}\ (\overrightarrow{OP})$

17−15

$OT : PT = 17 : 2$

となる。

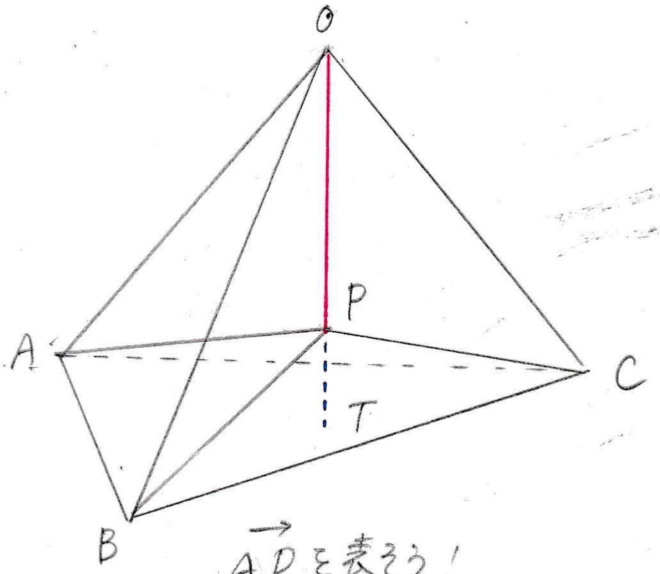
これは四面体OABCと四面体PABCの"高さの比"と考えられるから

$(\text{四面体}PABC) = \frac{2}{17}V$ …①

同様に他の3つの体積比も出していこう。

② 四面体AOBCについて

APの延長と面OBCの交点をSとする。



$\overrightarrow{AP}$を表そう！

$2\overrightarrow{OP} + 3\overrightarrow{AP} + 5\overrightarrow{BP} + 7\overrightarrow{CP} = \vec{0}$

変形、"点A"を始点とするベクトルにする。

終点−始点でいい

$2(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AO}) + 3\overrightarrow{AP} + 5(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + 7(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AO} + 3\overrightarrow{AP} + 5\overrightarrow{AP} - 5\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AP} - 7\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$17\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AO} + 5\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AP} = \frac{2\overrightarrow{AO} + 5\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC}}{17}$

ここから$\overrightarrow{AS}$を表すと…

$\overrightarrow{AP} = \frac{\bigcirc}{17} \cdot \frac{2\overrightarrow{AO} + 5\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC}}{\bigcirc}$

$\bigcirc = 2 + 5 + 7 = 14$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{14}{17}\cdot\frac{2\overrightarrow{AO}+5\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC}}{14}$$

これが $\overrightarrow{AS}$ である。

Sは面OBC上にあり

$$\frac{2}{14}+\frac{5}{14}+\frac{7}{14}=1$$

となるから

$$\overrightarrow{AP} = \frac{14}{17}\overrightarrow{AS}$$

$$AS : PS = 17 : 17-14$$

$$= 17 : 3$$

四面体OABCの高さ

四面体POBCの高さ

$$(\text{四面体}POBC) = \frac{3}{17}V \cdots ②$$

③

次に、四面体BOACについて

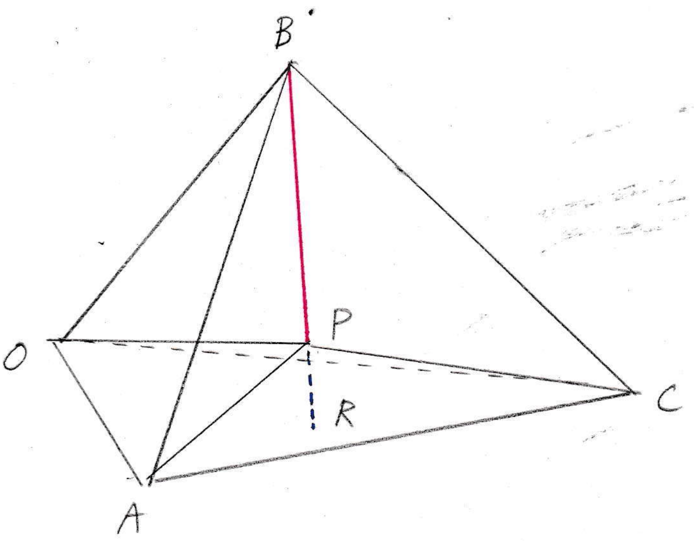
BPの延長と面OACの交点をQ

とする。

$\overrightarrow{BP}$ を表そう

$$2\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{AP}+5\overrightarrow{BP}+7\overrightarrow{CP}=\vec{0}$$

点Bを始点としたベクトルに変形！



$$2(\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BO})+3(\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BA})+5\overrightarrow{BP}$$

$$+7(\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC})=\vec{0}$$

$$2\overrightarrow{BP}-2\overrightarrow{BO}+3\overrightarrow{BP}-3\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{BP}$$

$$+7\overrightarrow{BP}-7\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$

$$17\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{BO}+3\overrightarrow{BA}+7\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BP}=\frac{2\overrightarrow{BO}+3\overrightarrow{BA}+7\overrightarrow{BC}}{17}$$

ここから $\overrightarrow{BQ}$ を表すと…

$$\overrightarrow{BP}=\frac{\bigcirc}{17}\cdot\frac{2\overrightarrow{BO}+3\overrightarrow{BA}+7\overrightarrow{BC}}{\bigcirc}$$

$$\bigcirc = 2+3+7=12$$

$\overrightarrow{BQ}$

$$\overrightarrow{BP}=\frac{12}{17}\cdot\frac{2\overrightarrow{BO}+3\overrightarrow{BA}+7\overrightarrow{BC}}{12}$$

$$\overrightarrow{BP} = \frac{12}{17}\overrightarrow{BQ}$$

$BQ : PQ = 17 : 5$

四面体OABCの高さ

四面体POACの高さ

より

$$(\text{四面体POAC}) = \frac{5}{17}V \quad \cdots ③$$

④

最後に 四面体COABについて…

CPの延長と面OABとの交点をRとおく

$\overrightarrow{CP}$を表そう

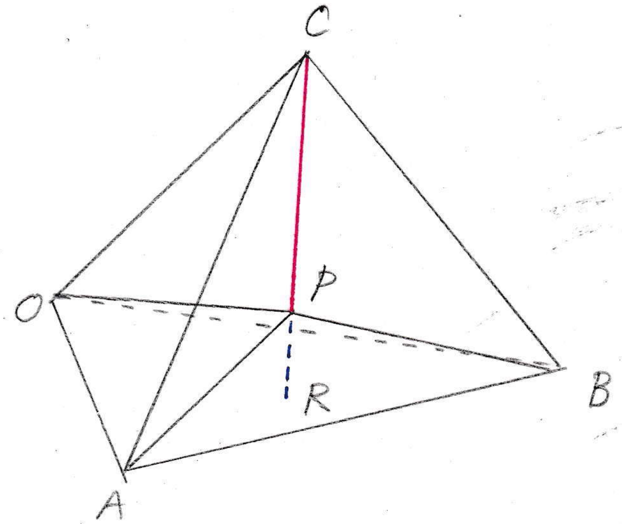
$$2\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{AP}+5\overrightarrow{BP}+7\overrightarrow{CP}=\vec{0}$$

点Cを始点としたベクトルに変形！

$$2(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CO})+3(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CA})+5(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CB})+7\overrightarrow{CP}=\vec{0}$$

$$2\overrightarrow{CP}-2\overrightarrow{CO}+3\overrightarrow{CP}-3\overrightarrow{CA}+5\overrightarrow{CP}-5\overrightarrow{CB}+7\overrightarrow{CP}=\vec{0}$$

$$17\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{CO}+3\overrightarrow{CA}+5\overrightarrow{CB}$$



$$\overrightarrow{CP}=\frac{2\overrightarrow{CO}+3\overrightarrow{CA}+5\overrightarrow{CB}}{17}$$

$\overrightarrow{CR}$を表すと…

$$\overrightarrow{CP}=\frac{\bigcirc}{17}\cdot\frac{2\overrightarrow{CO}+3\overrightarrow{CA}+5\overrightarrow{CB}}{\bigcirc}$$

$$\bigcirc = 2+3+5=10$$

$\overrightarrow{CR}$

$$\overrightarrow{CP}=\frac{10}{17}\cdot\frac{2\overrightarrow{CO}+3\overrightarrow{CA}+5\overrightarrow{CB}}{10}$$

$$=\frac{10}{17}\overrightarrow{CR}$$

$CR : PR = 17 : 7$

四面体OABCの高さ

四面体POABの高さ

より

$$(\text{四面体POAB}) = \frac{7}{17}V \quad \cdots ④$$

①, ②, ③, ④より

$$PABC : PBCO : PCOA : POAB$$

$$= \frac{2}{17}V : \frac{3}{17}V : \frac{5}{17}V : \frac{7}{17}V$$

$$= \underline{\underline{2 : 3 : 5 : 7}} \quad \cdots (答)$$

$$\boxed{[答]\ 2 : 3 : 5 : 7}$$