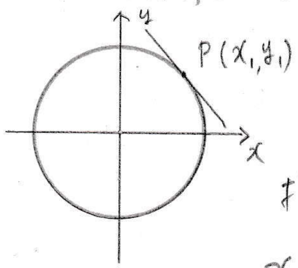
［問題］原点を中心とする半径1の円Cと点A(1, 2)がある。
(1) 点Aを通る円Cの接線の方程式を求めよ。

＜解説・解答＞

原点が中心の円のときのみ使用可能

円の接線の方程式



円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 P(x_1, y_1) における接線の方程式は、

$$x_1x+y_1y=r^2$$

円C上の点T(x_1, y_1)を通る接線を求めると

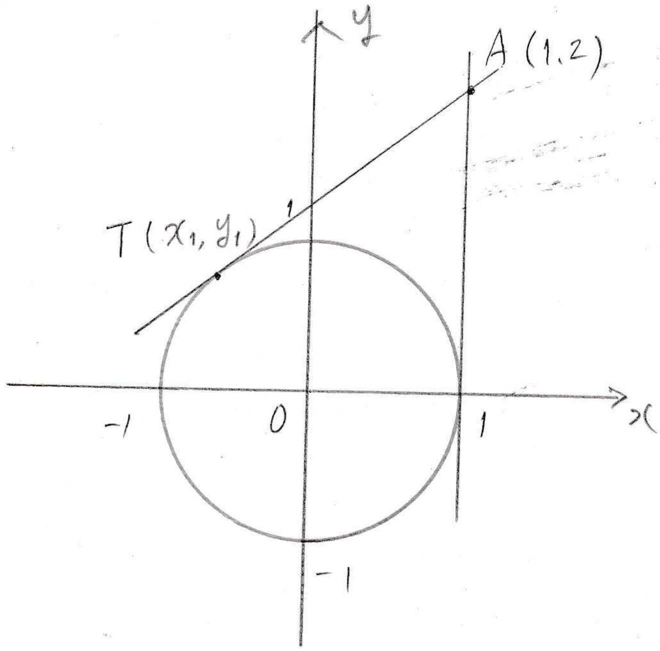
$$x_1x+y_1y=1$$

この接線が点A(1, 2)を通るから、

$$x_1+2y_1=1 \quad \cdots ①$$

また、点T(x_1, y_1)は円C上の点だから、

$$x_1^2+y_1^2=1 \quad \cdots ②$$



①を②に代入する

$$(1-2y_1)^2+y_1^2=1$$

$$1-4y_1+4y_1^2+y_1^2=1$$

$$5y_1^2-4y_1=0$$

$$y_1(5y_1-4)=0$$

$$y_1=0,\ \frac{4}{5}$$

・$y_1=0$ のとき、$x_1=1$

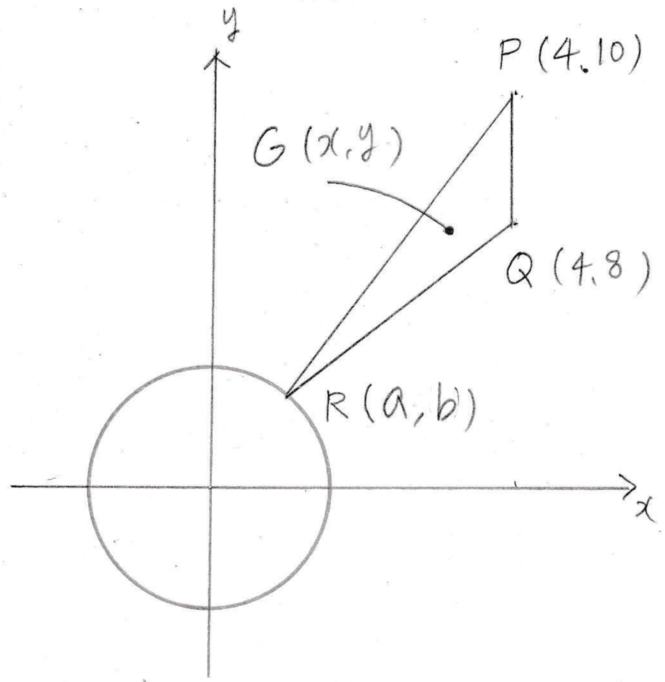
接線は $x=1$

・$y_1=\frac{4}{5}$ のとき、$x_1=-\frac{3}{5}$

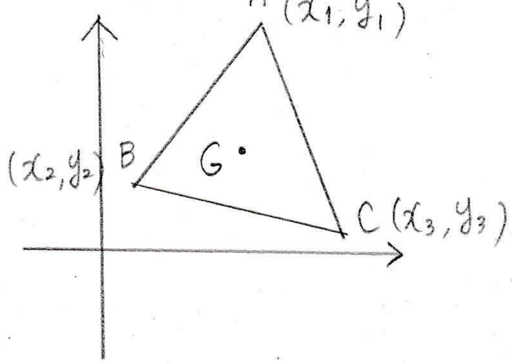
接線は $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=1$

[答]　$x = 1$

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 1$$



△ABCの重心Gの座標



$$G(a, b) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

(2) 2点P (4, 10) Q (4, 8) がある。円C上を動く点Rと、P, Qを結ぶ△PQRの重心Gの軌跡を求めよ。

＜解説・解答＞

点Rを (a, b), Gを (x, y) とおく。

Gは △PQRの重心だから

$$(x, y) = \left(\frac{a+4+4}{3}, \frac{b+10+8}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{a+8}{3}, \frac{b+18}{3} \right)$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+8}{3} \\ y = \dfrac{b+18}{3} \end{cases} \cdots ①$$

(a, b) ← $x^2 + y^2 = 1$

点Rは円C上を通るから、

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \cdots ②$$

①を②に代入

$$3x = a + 8$$

$$\underline{a = 8 - 3x}$$

$$3y = b + 18$$

$$\underline{b = 18 - 3y}$$

$$(8-3x)^2 + (18-3y)^2 = 1$$

$$64 - 48x + 9x^2 + 324 - 108y + 9y^2 = 1$$

$$9x^2 - 48x + 9y^2 - 108y = -387$$

両辺を9で割る
（x^2, y^2の係数を1にしたい）
円だから…

$$x^2 - \frac{16}{3}x + y^2 - 12y = -43$$

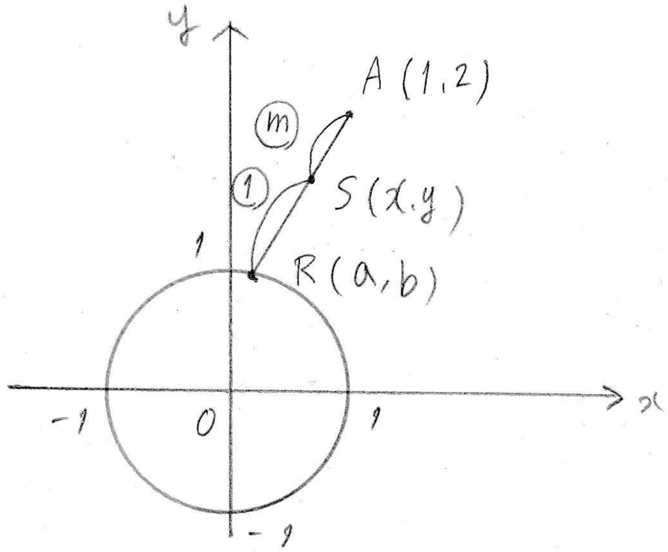
$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + (y-6)^2 = -43 + \frac{64}{9} + 36 = \frac{1}{9}$$

∴ 中心$\left(\frac{8}{3}, 6\right)$ 半径$\frac{1}{3}$の円

［答］中心$\left(\frac{8}{3}, 6\right)$, 半径$\frac{1}{3}$の円

(4) 点Aと点Rを結ぶ線分ARを$m:1$に内分する点を$S(x, y)$とする。点Rが円C上を動くとき、点Qの軌跡を求めよ。

＜解説・解答＞



点Rを(a, b)とおく。

$S(x, y)$は、ARを$m:1$に内分するから、

$$(x, y) = \left(\frac{ma+1}{1+m}, \frac{mb+2}{1+m}\right)$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{ma+1}{m+1} \\ y = \dfrac{mb+2}{m+1} \end{cases} \quad ①$$

$R(a, b)$ は円 C を通るから

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \cdots ②$$

① を ② に代入

$$x = \frac{ma + 1}{m + 1}$$

$$(m+1)x = ma + 1$$

$$ma = (m+1)x - 1$$

$m \neq 0$ であるから

$$a = \frac{(m+1)x - 1}{m}$$

$$y = \frac{mb + 2}{m + 1}$$

$$(m+1)y = mb + 2$$

$$mb = (m+1)y - 2$$

$m \neq 0$ であるから

$$b = \frac{(m+1)y - 2}{m}$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$\left\{ \frac{(m+1)x - 1}{m} \right\}^2 + \left\{ \frac{(m+1)y - 2}{m} \right\}^2 = 1$$

両辺に m^2 をかける.

$$\{(m+1)x - 1\}^2 + \{(m+1)y - 2\}^2 = m^2$$

$$(m+1)^2x^2 - 2(m+1)x + 1 + (m+1)^2y^2 - 4(m+1)y + 4 = m^2$$

両辺を $(m+1)^2$ で割る. $(m+1)^2 \neq 0$

x^2, y^2 の係数を 1 にしたいから

$$x^2 - \frac{2}{m+1}x + \frac{1}{(m+1)^2} + y^2 - \frac{4}{m+1}y + \frac{4}{(m+1)^2} = \left(\frac{m}{m+1}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{m+1}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{m+1}\right)^2 = \left(\frac{m}{m+1}\right)^2$$

∴ 中心 $\left(\frac{1}{m+1}, \frac{2}{m+1}\right)$ 半径 $\frac{m}{m+1}$ の円.

[答] 中心 $\left(\frac{1}{m+1}, \frac{2}{m+1}\right)$, 半径 $\frac{m}{m+1}$ の円.