

[小問集合]

(1) $(x+y-z+1)(x-y+z-1)$ を展開・整理せよ。

<解説・解答>

工夫して計算しよう。置きかえを利用するが、どこを置きかえるかが問題。

$$\begin{aligned} & \left\{ x + \underbrace{(y-z+1)} \right\} \left\{ x - \underbrace{(y-z+1)} \right\} \\ &= x^2 - \underbrace{(y-z+1)}^2 \\ &= x^2 - \left\{ \underbrace{(y-z)} + 1 \right\}^2 \\ &= x^2 - \left\{ \underbrace{(y-z)^2} + 2 \underbrace{(y-z)} + 1 \right\} \\ &= x^2 - (y^2 - 2yz + z^2 + 2y - 2z + 1) \\ &= \underline{\underline{x^2 - y^2 - z^2 + 2yz - 2y + 2z - 1}} \end{aligned}$$

[答] $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz - 2y + 2z - 1$

(2) $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc$ を因数分解せよ。

<解説・解答>

項の多い(4項以上)の因数分解の鉄則!

文字の次数に着目!

① 次数が同じ場合

⇒ いづれかの文字を選んで降べきの順で並べる

② 次数が異なる文字がある場合

⇒ 次数が低い文字でまとめる

(与式)は、 a, b, c の文字があり、全て2次で同じ。

① a を選んで降べきの順で並べよう。(bでもcでも同じ結果になる)

(与式)

$$= (b+c)a^2 + (b^2+3bc+c^2)a + b^2c + bc^2$$

↓
"aの2次式"として因数分解する。

$$= (b+c)a^2 + (b^2 + 3bc + c^2)a + bc(b+c)$$

このまま ↓
 1 = あきびや 1 3473
 (wavy underline)

$$\begin{array}{r} b+c \quad \times \quad bc \quad - \quad bc. \\ 1 \quad \times \quad b+c \quad - \quad b^2+2bc+c^2 \end{array}$$

$$b^2 + 3bc + c^2$$

$$= \{a(b+c) + bc\}(a+b+c)$$

$$= \underline{\underline{(a+b+c)(ab+bc+ca)}}$$

$$\left[\frac{a}{b} \right] (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

(3) $x = 2 - \sqrt{3}$, $y = 2 + \sqrt{3}$ のとき

$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ の値を求めよ。

<解説・解答>

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$$

$$= \frac{x^3 + y^3}{xy}$$

$$= \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{xy}$$

(2) (3) (4)
 ↙ ↘ ↙ ↘
 (1) (3)

① $x+y = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = \underline{4}$

② $x^2 = (2 - \sqrt{3})^2$
 $= 4 - 4\sqrt{3} + 3 = \underline{7 - 4\sqrt{3}}$

③ $xy = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$
 $= 4 - 3 = \underline{1}$

④ $y^2 = (2 + \sqrt{3})^2$
 $= 4 + 4\sqrt{3} + 3 = \underline{7 + 4\sqrt{3}}$

2行3行(5式)に代入しよう!

(与式)

$$= \frac{4 \times (7 - 4\sqrt{3} - 1 + 7 + 4\sqrt{3})}{1}$$

$$= 4 \times (14 - 1)$$

$$= 4 \times 13$$

$$= \underline{\underline{52}}$$

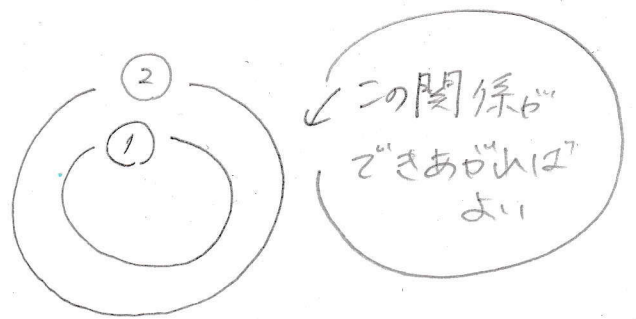
[答] 52

(4) 不等式 $-2 < x < a$ が解を持ち、その解が $3x - 1 < 5x + 9 < 4x + 11$ の解の範囲に全て含まれるように定数 a の値の範囲を求めよ。

< 解説・解答 >

$$-2 < x < a \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} 3x - 1 < 5x + 9 \\ 5x + 9 < 4x + 11 \end{cases} \dots \textcircled{2}$$



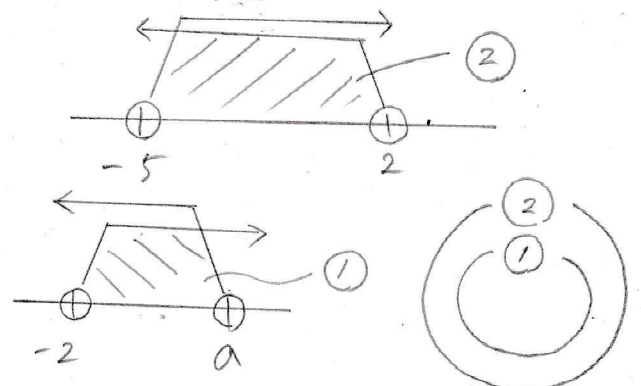
まず②を解こう。

$$3x - 1 < 5x + 9 \quad | \quad 5x + 9 < 4x + 11$$

$$2x > -10$$

$$x < 2$$

$$x > -5$$



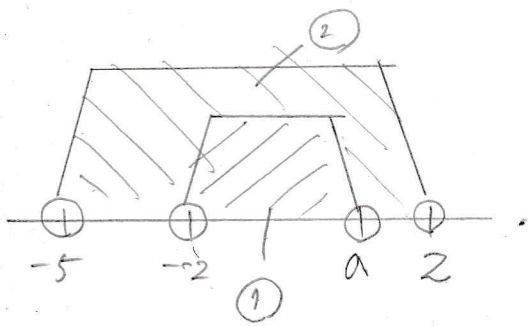


図.54

$$\underline{-2 < a < 2}$$

の配置であればよいのだから、
~~~~~

よって、不等号 (< or ≤) の精査

をしよ。

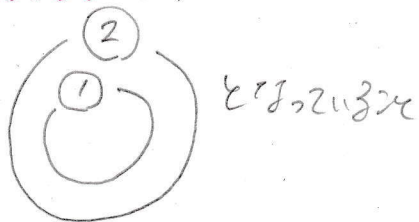
$$\underline{-2 < a < 2}$$

①      ②

① の精査

$$\begin{cases} -2 < a \\ -2 \leq a \end{cases} \text{ の精査}$$

$a = -2$  が条件を満たすかどうか確認  
~~~~~



$$-2 < x < a$$

↑
⇓ $a = -2$ が条件を満たす。

$-2 < x < -2$ とは、不等式が成り立たず不適

$$\begin{cases} -2 < a \\ -2 \leq a \end{cases}$$

次に ② の精査

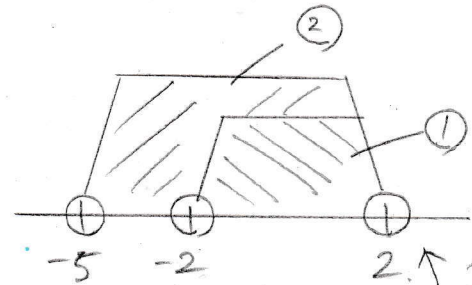
$$\begin{cases} a < 2 \\ a \leq 2 \end{cases} \text{ の精査}$$

$a = 2$ が条件を満たすかどうか。

$$-2 < x < a \leftarrow a = 2 \text{ が満たすか}$$

⇓

$$-2 < x < 2$$



① と ② と
○ = 白丸

∴ $a = 2$ は条件を満たす。

$$\begin{cases} a < 2 \\ a \leq 2 \end{cases}$$

① ② より

$$\underline{-2 < a \leq 2}$$

$$\boxed{[答] \quad -2 < a \leq 2}$$

(5) $3|x-2| - 2|x| < 2$ を満たす
 x の値の範囲を求めよ。

<解説・解答>

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & (x-2 \geq 0 \text{ のとき}) \textcircled{1} \\ -x+2 & (x-2 < 0 \text{ のとき}) \textcircled{2} \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0 \text{ のとき}) \textcircled{A} \\ -x & (x < 0 \text{ のとき}) \textcircled{B} \end{cases}$$

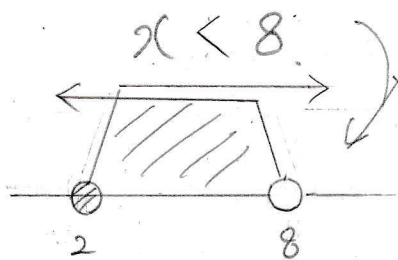
[1] ① + ① のとき

$$x \geq 2 \text{ のとき } x \geq 0 \text{ のとき}$$

$$\Rightarrow \underline{x \geq 2 \text{ のとき}}$$

$$3(x-2) - 2x < 2$$

$$3x - 6 - 2x < 2$$



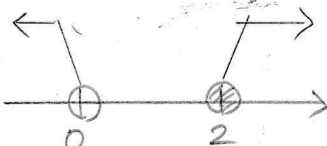
$$\therefore \underline{2 \leq x < 8} \dots [1]$$

[2] ① + ② のとき

$$x \geq 2 \text{ のとき } x < 0 \text{ のとき}$$

\Rightarrow これは満たさず

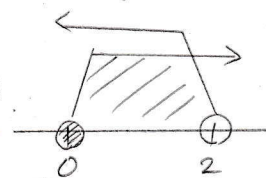
x の範囲はなし



[3] ② + ① のとき

$$x < 2 \text{ のとき } x \geq 0 \text{ のとき}$$

$$\Rightarrow \underline{0 \leq x < 2 \text{ のとき}}$$

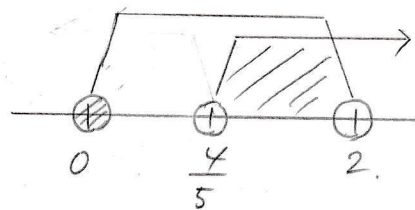


$$3(-x+2) - 2x < 2$$

$$-3x + 6 - 2x < 2$$

$$-5x < -4$$

$$x > \frac{4}{5}$$



$$\therefore \underline{\frac{4}{5} < x < 2} \dots [3]$$

[4] ② + ② のとき

$$x < 2 \text{ のとき } x < 0 \text{ のとき}$$

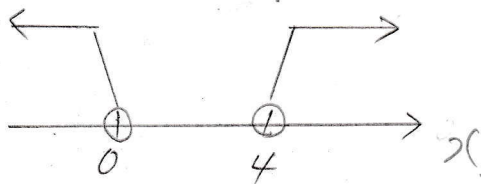
$$\Rightarrow \underline{x < 0 \text{ のとき}}$$

$$3(-x+2) - 2(-x) < 2$$

$$-3x + 6 + 2x < 2$$

$$-x < -4$$

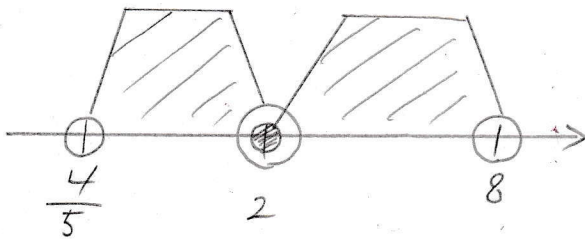
$$x > 4$$



∴ これを満たすxの値の範囲

はない。... [4]

[1] ~ [4] ♪



$$\therefore \underline{\underline{\frac{4}{5} < x < 8}}$$

$$[\frac{4}{5}] \cdot \frac{4}{5} < x < 8$$

[不等式の文章題] A君が1教科10点満点の小テストを5教科受けた。

英語と数学の合計点は13点であった。国語の点数は社会の点数より2点低く、2点低く、理科の点数は社会の点数より1点高かった。また、国語と社会の合計の3倍は、他教科の合計の2倍より高く、5教科の平均は、目標としていた8点及ばなかった。A君の平均点を求めよ。

<解説・解答>

英語	} 合計
数学	
国語	} (社) - 2
社会	
理科	} (社) + 1

社会を x 点とするのがよさげ。

ダメならまた他のやり方を考えればよい。

① 国語と社会の合計の3倍は、他教科の合計の2倍より高い。

$$(x - 2 + x) \times 3 > (13 + x + 1) \times 2$$

② 5教科の平均は目標としていた点数に8点及ばない。

$$(13 + x(-2 + x + x + 1)) \div 5 < 8$$

$$\textcircled{1} \quad 3(2x - 2) > (x + 14) \times 2$$

$$6x - 6 > 2x + 28$$

$$4x > 34$$

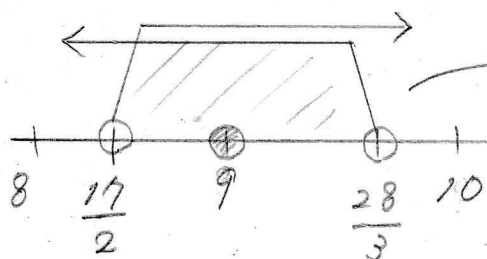
$$x > \frac{17}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad (3x + 12) \times \frac{1}{5} < 8$$

$$3x + 12 < 40$$

$$3x < 28$$

$$x < \frac{28}{3}$$



範囲内における整数 x の値は...

$$\underline{x = 9}$$

これは、平均点を求めよう

$$(13 + 7 + 9 + 10) \div 5$$

$$= 39 \div 5$$

$$= \underline{\underline{7.8}}$$

[答] 7.8点