[問題] $f(x)=x^3+ax^2+bx+3a+20$ がある。a, b は実数の定数である。

(1) $f(x)$ を x^2-x-2 で割った余りが $3x+2$ であるとき a と b の値を求めよ。

<解説・解答>

$f(x)$ を x^2-x-2 で割ると，$3x+2$ が余るから

$$\boxed{f(x)=(x^2-x-2)Q(x)+3x+2}$$

商

と変形できる

さらに…

$$f(x)=(x-2)(x+1)Q(x)+3x+2$$

$f(x)$ に ① $x=2$，② $x=-1$ を代入しよう

① $f(2)=3\cdot2+2=8$ … ①'

② $f(-1)=3\cdot(-1)+2=-1$ … ②'

次に

$f(x)=x^3+ax^2+bx+3a+20$

に同じく $\boxed{1}$ $x=2$，$\boxed{2}$ $x=-1$ を代入しよう

$f(2)=8+4a+2b+3a+20$

$=7a+2b+28$ … $\boxed{1}$

$\boxed{2}$ $f(-1)=-1+a-b+3a+20$

$=4a-b+19$ … $\boxed{2}$

まとめよう

① $f(2)=8$	$\boxed{1}$ $f(2)=7a+2b+28$
② $f(-1)=-1$	$\boxed{2}$ $f(-1)=4a-b+19$

①$=\boxed{1}$，②$=\boxed{2}$ より

$$\begin{cases} 8=7a+2b+28 \\ -1=4a-b+19 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと

$$\begin{cases} 7a+2b=-20 \\ 4a-b=-20 \end{cases}$$

$a=-4$

$b=4$

[答] $a=-4$, $b=4$

(2) $f(x)=0$ が $x=1+\sqrt{3}i$ を解として持つとき、a と b の値を求めよ。

＜解説・解答＞

$f(x)=0$ に $x=1+\sqrt{3}i$ を代入…

は絶対にやめよう…

$f(x)$ を $x=1+\sqrt{3}i$ で割るのが

よいが、$\sqrt{3}$ や i があると厄介なので、

これらを消してから実行しよう！

$x=1+\sqrt{3}i$ の式を、工夫して2乗

することで消すことができる！

$x=1+\sqrt{3}i$ "1"を左辺に移項

$x-1=\sqrt{3}i$ 2乗！

$x^2-2x+1=-3$

$x^2-2x+4=0$

この式は $x=1+\sqrt{2}i$ を解に持っている。

$f(x)$ を x^2-2x+4 で割る…

しかし、これもやりたくない！！

$f(x)=x^3+ax^2+bx+3a+20=0$

を x^2-2x+4 で割った商を

"$x-c$" とおく.

(f(x)のx^3の項の係数は1だから…)

$f(x)=(x^2-2x+4)(x-c)$ とおき

$f(x)=x^3+ax^2+bx+3a+20=0$

と恒等式の解法で解こう!

$f(x)=(x^2-2x+4)(x-c)$

$=x^3-2x^2+4x-cx^2+2cx-4c$

$=x^3+(-c-2)x^2+(2c+4)x-4c$ …①

この式が $f(x)=x^3+ax^2+bx+3a+20$

と等しいから. 各係数を比較して

$$\boxed{\begin{aligned} a&=-c-2\\ b&=2c+4\\ 3a+20&=-4c \end{aligned}}$$

これらを連立して解くと…

$a=12$

$b=-24$

$c=-14$ である

$$\boxed{[答]\ a=12,\ b=-24}$$

(3) $a=-4$, $b=2$ であるとする。

$f(x)=0$ の3つの解を α, β, γ とする。

(i) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$ を値めよ。

<解説・解答>

3次方程式の解と係数の関係

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を α, β, γ とする。

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

$$f(x)=x^3-4x^2+2x+8=0$$

$$\alpha+\beta+\gamma=4$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$$

$$\alpha\beta\gamma=-8$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$$

$$=\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$$

$$=\frac{2}{-8}$$

$$=-\frac{1}{4}$$

[答] $-\dfrac{1}{4}$

(ii) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}$ を求めよ。

<解説・解答>

$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}$

$= \dfrac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$ ①, ②

① を求めよう

$(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2$

$=\{(\alpha\beta+\beta\gamma)+\gamma\alpha\}^2$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma)^2+2\gamma\alpha(\alpha\beta+\beta\gamma)+\gamma^2\alpha^2$

$=\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta^2\gamma+\beta^2\gamma^2+2\alpha^2\beta\gamma+2\alpha\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$

$=\underline{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}+\underline{2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}$

これいる！

この式を変形しよう！

$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$$\boxed{\begin{aligned}&\alpha+\beta+\gamma=4\\&\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2\\&\alpha\beta\gamma=-8\end{aligned}}$$

$=2^2-2\times(-8)\times4$

$=4+64$

$=\underline{68}$ … ①

② $=\alpha^2\beta^2\gamma^2=(\alpha\beta\gamma)^2=(-8)^2$

$=\underline{64}$ … ②

(与式) $=\dfrac{68}{64}$

$=\dfrac{17}{16}$

[答] $\dfrac{17}{16}$