[問題] $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}a_n^2$

(1) $a_2+a_3$を求めよ。

<解説・解答>

漸化式に$n=1$を代入,

$$a_2=\frac{1}{\sqrt{2}}a_1^2$$

$$=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$a_3=\frac{1}{\sqrt{2}}a_2^2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

$$\underline{a_2+a_3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{[\text{答}]\ \frac{3\sqrt{2}}{4}}$$

(2) $b_n=\log_2 a_n$とおくとき,数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

<解説・解答>

$$a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}a_n^2$$

両辺に$\log_2$を取る

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}a_n^2$$

$$(\text{右辺})=\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}+\log_2 a_n^2$$

$$=\log_2 2^{-\frac{1}{2}}+2\log_2 a_n$$

$$=-\frac{1}{2}\log_2 2+2\log_2 a_n$$

$$=2\log_2 a_n-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\log_2 a_n=b_n\\ \log_2 a_{n+1}=b_{n+1}\end{array}}$$ をそれぞれ代入

$$b_{n+1}=2b_n-\frac{1}{2}$$

→この漸化式を解く。

$$b_{n+1} = 2b_n - \frac{1}{2}$$

$$-)\ \alpha = 2\alpha - \frac{1}{2}$$ ← 特性方程式

$$b_{n+1} - \alpha = 2(b_n - \alpha)$$

αの値を求める。

$$\alpha = 2\alpha - \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$b_{n+1} - \frac{1}{2} = 2\left(b_n - \frac{1}{2}\right)$$

この式から$\left\{b_n - \frac{1}{2}\right\}$は…

初項 $b_1 - \frac{1}{2}$

$$= \log_2 a_1 - \frac{1}{2}$$

$$= \underbrace{\log_2 1}_{0} - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

公比 2の等比数列である。

$$\therefore\ b_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}$$

$$= -2^{-1}\cdot 2^{n-1}$$

$$= -2^{n-2}$$

$$b_n = \frac{1}{2} - 2^{n-2}$$

[答] $b_n = \frac{1}{2} - 2^{n-2}$

(3) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

<解説・解答>

(2)より

$$b_n = \log_2 a_n = \frac{1}{2} - 2^{n-2}$$

超重要!!

指数と対数の関係

$$a^b = M \implies b = \log_a M$$

$$\log_2 a_n = \frac{1}{2} - 2^{n-2}$$

$$a_n = 2^{\frac{1}{2} - 2^{n-2}}$$

[答] $a_n = 2^{\frac{1}{2} - 2^{n-2}}$