[問題] 1辺の長さが$\sqrt{2}$の正四面体OABCがある。線分OAおよびBCを$(1-t):t$ $(0<t<1)$に内分する点をそれぞれP, Qとし、OCを1:2に内分する点をRとする。
また$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおく。

(1) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}$を求めよ。

<解説・解答>

㋐ $\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta_1$

正四面体は各面が正三角形 $\therefore \theta_1=60°$

$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 60°$

$\frac{1}{2}$

$= 1$

㋑ $\vec{a}\cdot\vec{a}$

$\theta_2=0°$

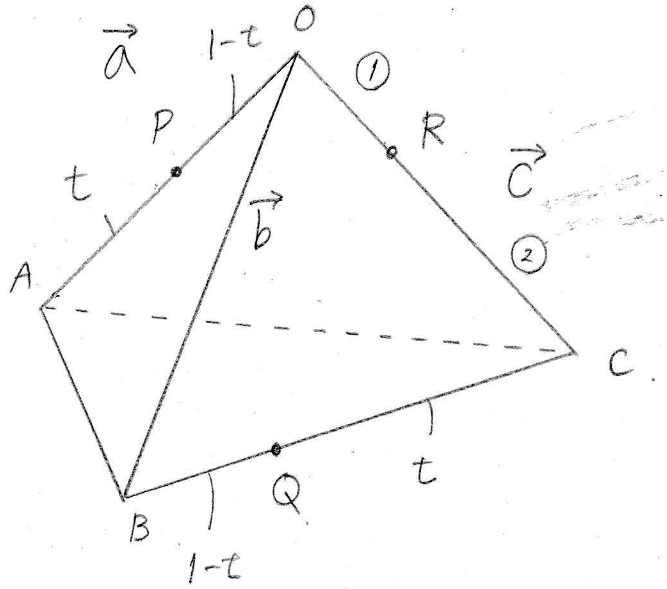
$= |\vec{a}||\vec{a}|\cos\theta_2$

$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 0°$

1

$= 2$

[答] $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $\vec{a}\cdot\vec{a}=2$

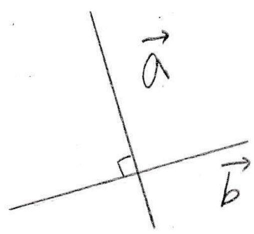


(2) $\overrightarrow{RP}$と$\overrightarrow{RQ}$が垂直になるようなtの値を求めよ。

<解説・解答>

ベクトルの垂直条件

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$



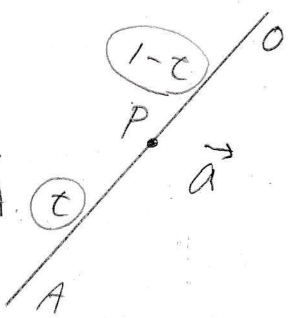
$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$

①$\overrightarrow{RP}$ ②$\overrightarrow{PQ}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, tを用いて表そう

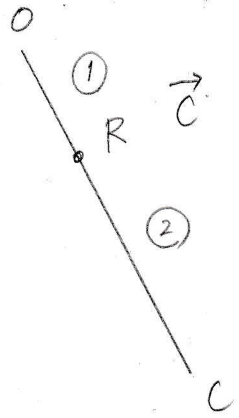
[1] $\overrightarrow{RP}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, tで表す。

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}$

$\overrightarrow{OP} = \dfrac{1-t}{1-t+t}\overrightarrow{OA}$



$= (1-t)\vec{a}$



$\vec{OR} = \frac{1}{1+2}\vec{OC}$

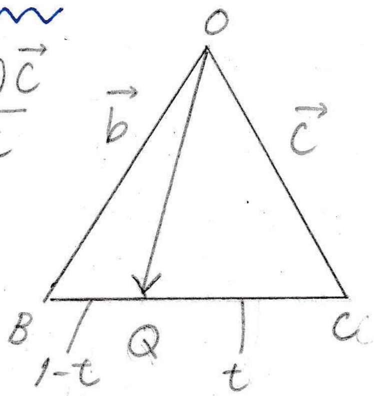
$= \frac{1}{3}\vec{c}$

$\therefore \vec{RP} = (1-t)\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c}$ …①

[2] $\vec{RQ}$を$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, t$で表す。

$\vec{RQ} = \vec{OQ} - \vec{OR}$

$\vec{OQ} = \frac{t\vec{b} + (1-t)\vec{c}}{1-t+t}$



$= t\vec{b} + (1-t)\vec{c}$

$\vec{OR} = \frac{1}{3}\vec{c}$

$\therefore \vec{RQ} = t\vec{b} + (1-t)\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{c}$

$= t\vec{b} + \left(\frac{2}{3} - t\right)\vec{c}$ …②

[1] [2] より

$\vec{RP} \cdot \vec{RQ} = \vec{0}$

$\left\{(1-t)\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c}\right\}\left\{t\vec{b} + \left(\frac{2}{3} - t\right)\vec{c}\right\} = 0$

$t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b} + (1-t)\left(\frac{2}{3} - t\right)\vec{a}\cdot\vec{c}$

$-\frac{1}{3}t\vec{b}\cdot\vec{c} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} - t\right)|\vec{c}|^2 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 1 \\ |\vec{c}|^2 = 2\end{array}}$$

$t(1-t) + (1-t)\left(\frac{2}{3} - t\right) - \frac{1}{3}t$

$-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} - t\right) = 0$

$\cancel{t} - \cancel{t^2} + \frac{2}{3} - \cancel{t} - \frac{2}{3}t + \cancel{t^2} - \frac{1}{3}t$

$-\frac{4}{9} + \frac{2}{3}t = 0$

$t = \frac{2}{3}$

$\boxed{[答]\ t = \frac{2}{3}}$

(3) (2)のとき、△PQRの面積を求めよ。

<解説・解答>

$\angle PRQ = 90^\circ$ である。

△PQRの面積は…

$$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{RP}||\overrightarrow{RQ}|$$

① ②

[1] $|\overrightarrow{RP}|$ を求める。

$$\overrightarrow{RP} = (1-t)\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c}$$

$t = \frac{2}{3}$ より

$$= \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c}$$

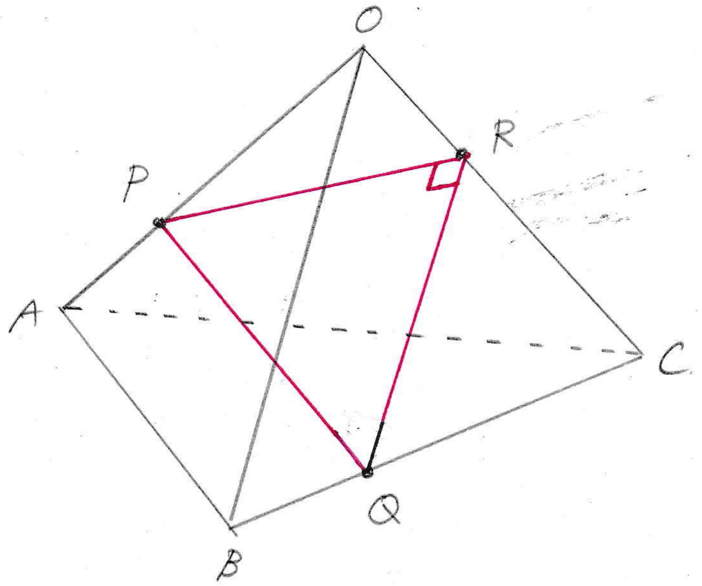
$$|\overrightarrow{RP}|^2 = \left(\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c}\right)^2$$

$$= \frac{1}{9}|\vec{a}|^2 - \frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{c} + \frac{1}{9}|\vec{c}|^2$$

2 1 2

$$= \frac{2}{9}$$

$$|\overrightarrow{RP}| = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \cdots ①$$



[2] $|\overrightarrow{RQ}|$ を求める。

$$\overrightarrow{RQ} = t\vec{b} + \left(\frac{2}{3} - t\right)\vec{c}$$

$t = \frac{2}{3}$ より

$$= \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$|\overrightarrow{RQ}|^2 = \frac{4}{9}|\vec{b}|^2$$

$$= \frac{8}{9}$$

$$|\overrightarrow{RQ}| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \cdots ②$$

$$\therefore \frac{1}{2}|\overrightarrow{RP}||\overrightarrow{RQ}|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{2}{9}$$

[答] $\frac{2}{9}$