［問題］平面上に2点A(4,2)
B(3,−1)と直線l；$x-2y+5=0$がある。

(1) 線分ABの垂直二等分線と直線lの交点Qの座標を求めよ。

＜解説・解答＞

ABの垂直二等分線を求める。

求めたい直線は…

① 直線ABと垂直である。

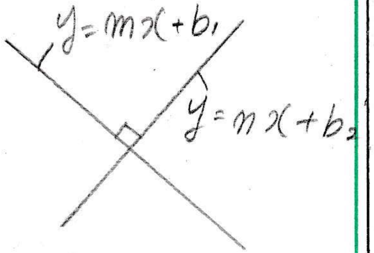
② ABの中点を通る。

これらを利用して、直線の式を求めよう。

① 直線ABと垂直である。

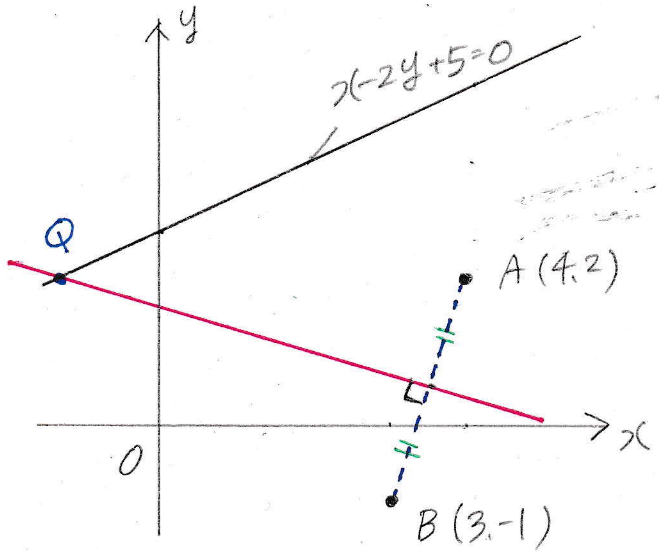
垂直な二直線の傾きの関係

垂直な二直線
$$\begin{cases} y=mx+b_1 \\ y=nx+b_2 \end{cases}$$



$$m\cdot n=-1$$

直線ABの傾き
$$\frac{2-(-1)}{4-3}=3$$



求めたい直線の傾きをmとすると

$$3m=-1$$
$$m=-\frac{1}{3}$$

② A, Bの中点を通る

A(4,2), B(3,−1)の中点

$$\left(\frac{4+3}{2},\ \frac{2-1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{7}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

①, ②より

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right)$$
$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

lとの交点Qを求める。

$l: x-2y+5=0$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

$$3x+15=-2x+10$$

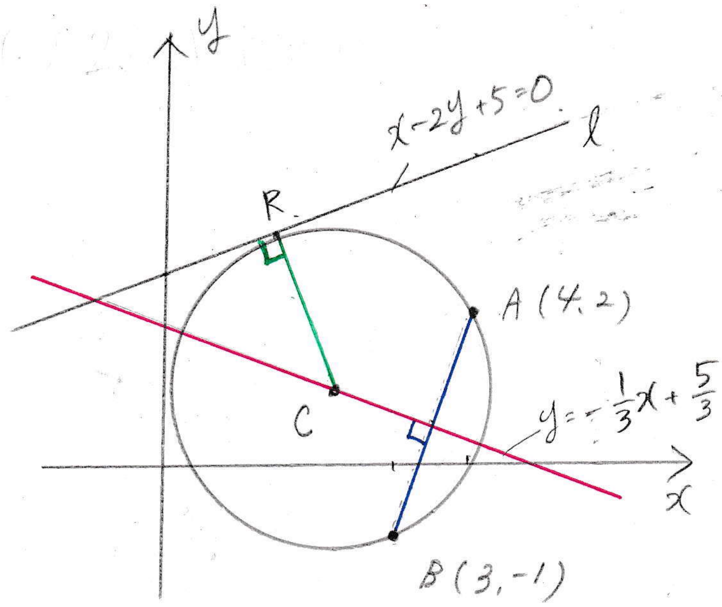
$$5x=-5$$

$$x=-1$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

$$=2$$

[答] $(-1, 2)$



(2) 2点A, Bを通り、直線lに接する円の方程式を求めよ。

<解説・解答>

求めたい円の中心をCとおく。

点Cは(1)で求めた直線

$y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ (A, Bの垂直二等分線)

を通る。

理由

この直線上のどの点も、点A, Bと同距離となるから

$C\left(t, -\frac{1}{3}t+\frac{5}{3}\right)$とおく。

円とlとの交点(=接点)をRとおくと、

$CA=CR$ ($CB=CR$ でも可)

を立式する。

① CA = 2点間の距離公式

② CR = 点と直線の距離公式

① CAを求める

$C\left(t, -\frac{1}{3}t+\frac{5}{3}\right)$ $A(4, 2)$

CA

$= \sqrt{(t-4)^2+\left(-\frac{1}{3}t+\frac{5}{3}-2\right)^2}$

$= \sqrt{(t-4)^2+\left(-\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{10}{9}t^2-\frac{70}{9}t+\frac{145}{9}}$ … ①

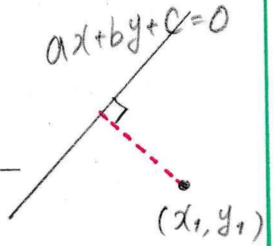
② CRを求める

点と直線の距離

点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$

の距離

$$= \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



$C\left(t, -\frac{1}{3}t+\frac{5}{3}\right)$ と $l : x-2y+5=0$

$$\frac{\left|t+\frac{2}{3}t-\frac{10}{3}+5\right|}{\sqrt{1+4}}$$

$$= \frac{\left|\frac{5}{3}t+\frac{5}{3}\right|}{\sqrt{5}} \quad \cdots ②$$

① = ② より

$$\sqrt{\frac{10}{9}t^2-\frac{70}{9}t+\frac{145}{9}} = \frac{\left|\frac{5}{3}t+\frac{5}{3}\right|}{\sqrt{5}}$$

両辺を2乗する

$$\frac{10}{9}t^2-\frac{70}{9}t+\frac{145}{9} = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{3}t+\frac{5}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{25}{9}t^2+\frac{50}{9}t+\frac{25}{9}\right)$$

$$= \frac{5}{9}t^2+\frac{10}{9}t+\frac{5}{9}$$

両辺を9でかける

$10t^2-70t+145=5t^2+10t+5$

$5t^2-80t+140=0$

$t^2-16t+28=0$

$(t-2)(t-14)=0$

$t=2, 14$

[A] $t=2$のとき

$C(2,1)$ 半径は

$$\frac{\left|\frac{5}{3}\cdot 2+\frac{5}{3}\right|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=5$

[B] $t=14$のとき

$C(14,-3)$ 半径は

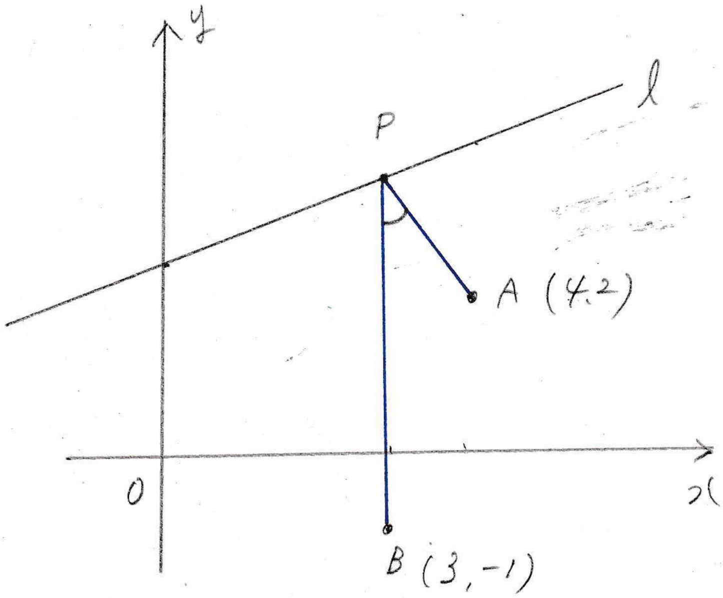
$$\frac{\left|\frac{5}{3}\cdot 14+\frac{5}{3}\right|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{25}{\sqrt{5}}=5\sqrt{5}$$

$\therefore (x-14)^2+(y+3)^2=125$

[答] $(x-2)^2+(y-1)^2=5$

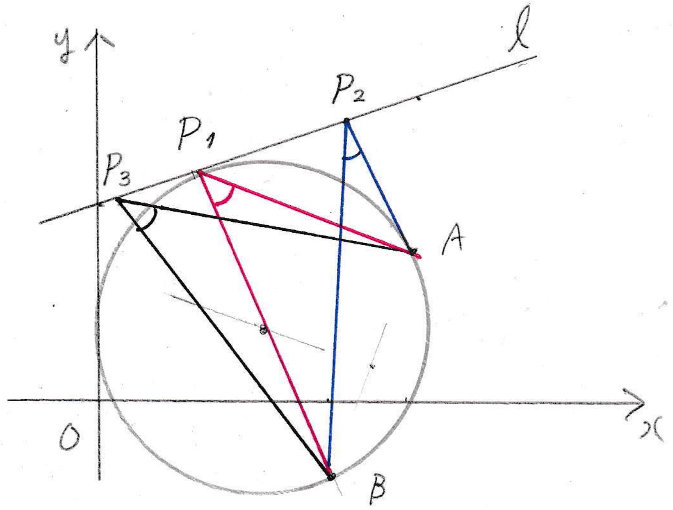
$(x-14)^2+(y+3)^2=125$



(3) 点Pが直線l上を動くとき

∠APBの最大値を求めよ。

＜解説・解答＞



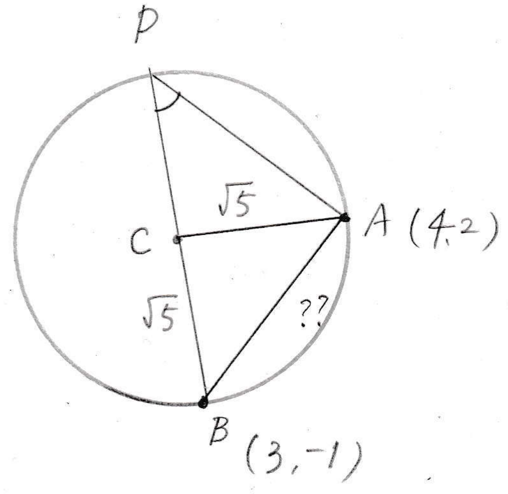
l上の点 P_1, P_2, P_3 を置いたとき、

(P_1は円上の点)

$\angle AP_1B$, $\angle AP_2B$, $\angle AP_3B$ の大きさを比較する。

P_1以外は 円外の点となるから

$\angle AP_1B$が最大となる



∠APBを求めよう.

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle ACB$$

$AC = BC = \sqrt{5}$

$$AB = \sqrt{(4-3)^2 + (2+1)^2}$$

$$= \sqrt{10}$$

$\therefore AC : BC : AB$

$= \sqrt{5} : \sqrt{5} : \sqrt{10}$

$= 1 : 1 : \sqrt{2}$ より

$\angle ACB = 90°$

$\therefore \angle APB = \frac{1}{2} \times 90 = 45°$

[答] 45°