

[1] $a=3+2\sqrt{2}$, $b=2+\sqrt{3}$ とする。

(1) $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ の値を求めよ。

<解説, 解答>

$$\textcircled{1} \frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3-2\sqrt{2}}{9-8}$$

$$= \underline{3-2\sqrt{2}} \dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{b}$$

$$= \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{4-3}$$

$$= \underline{2-\sqrt{3}} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{3} \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{ab}$$

※ この形で工夫して計算するのは
考えらるが...

$$a=3+2\sqrt{2}, b=2+\sqrt{3}$$

これは、工夫した計算の恩恵が
認められない! その代わりは...

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$$

$$= a \cdot \frac{1}{b} - b \cdot \frac{1}{a}$$

$$= (3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3})$$

$$- (2+\sqrt{3})(3-2\sqrt{2})$$

と計算した方が「×」...トがあるぞ!

$$= 6 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$$

$$- (6 - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6})$$

$$= \underline{8\sqrt{2} - 6\sqrt{3}} \dots \textcircled{3}$$

$$(1) \text{ 例 } \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 8\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (8\sqrt{2} - 6\sqrt{3})$$

$$= \underline{4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}} \quad \text{①}$$

$$\textcircled{2} \frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(a \cdot \frac{1}{b} + b \cdot \frac{1}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3})(3-2\sqrt{2}) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (6-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6} + 6-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6})$$

$$= \frac{1}{2} (12 - 4\sqrt{6}) = \underline{6 - 2\sqrt{6}}$$

②

$$\underline{4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} < x < 6 - 2\sqrt{6}}$$

$$\text{[答]} \quad 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} < x < 6 - 2\sqrt{6}$$

[2] a は実数の定数とし、2つの不等式
を考える。

$$|x-3| < 3 \dots \textcircled{1}, \quad |x-3| < \frac{1}{2}x+a \dots \textcircled{2}$$

(1) $\textcircled{1}$ を解け。

<解説・解答>

$$|x-3| < 3$$

$$-3 < x-3 < 3$$

$$\underline{\underline{0 < x < 6}}$$

[答] $0 < x < 6$

(2) $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ をともに満たす実数 x
が存在する a の値の範囲を
求めよ。

<解説・解答>

$\textcircled{2}$ を解け

$$|x-3| < \frac{1}{2}x+a$$

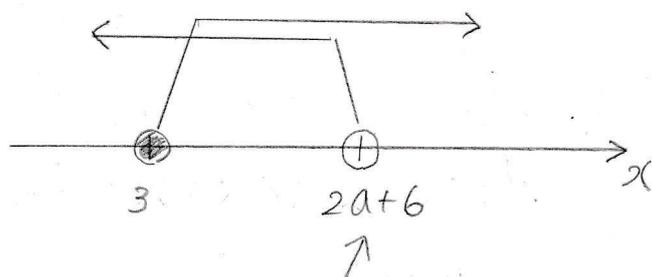
$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & (x \geq 3 \text{ とき}) \textcircled{A} \\ -x+3 & (x < 3 \text{ とき}) \textcircled{B} \end{cases}$$

\textcircled{A} $x \geq 3$ とき

$$x-3 < \frac{1}{2}x+a$$

$$\frac{1}{2}x < a+3$$

$$x < 2a+6$$

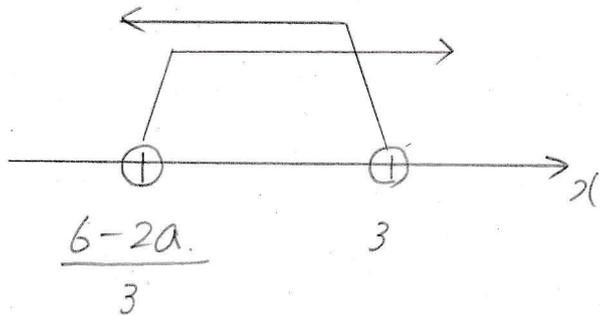


$2a+6$ は 3 より大きいか
わからぬ...
 3 より小さい可能性も...

② $x < 3$ のとき

$$-x + 3 < \frac{1}{2}x + a$$

$$x > \frac{6-2a}{3}$$

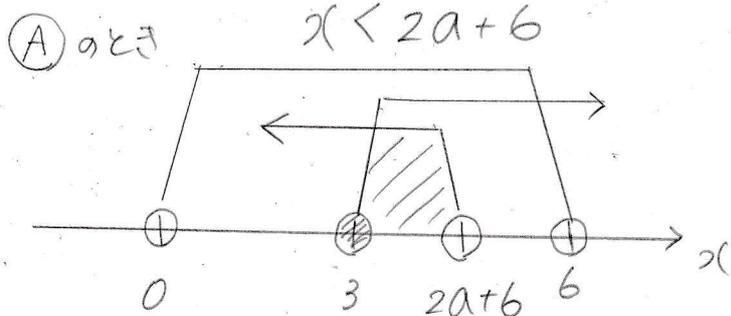


$\frac{6-2a}{3}$ はいくつにしろかわからない

3より大きい可能性がある...

① $0 < x < 6$

①, ②をともに満たす実数 x が存在するようにあると...



$3 < 2a+6$ であらばよい

↑
不等号は適当

< or ≤ を判定しよう

$$\begin{cases} 3 < 2a+6 & \text{どちらが正しいか} \\ 3 \leq 2a+6 & \text{判定しよう} \end{cases}$$

ちがいは $2a+6=3$ のとき

$2a+6=3$ のときが条件に適合するか

どうが考えよう

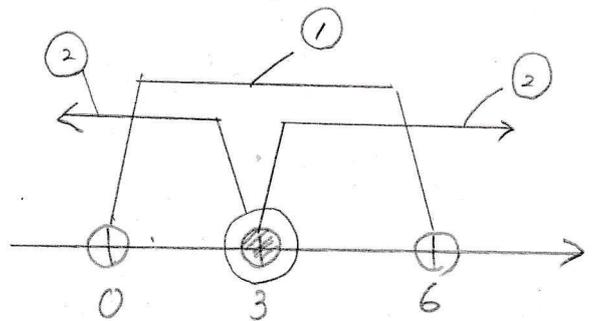
①, ②をともに満たす x が存在するか
どうか

$$x < 2a+6$$

"
3

↓

$$x < 3$$

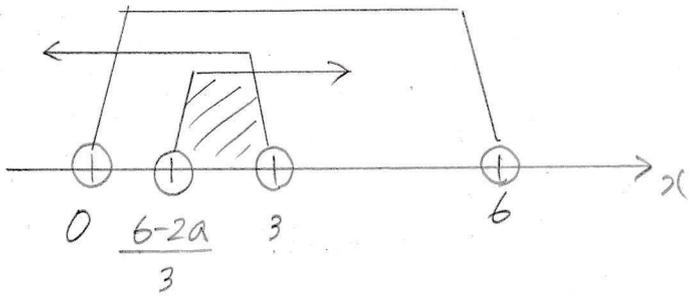


この範囲を満たす x の値は存在しない ⇒ 不適

$$\therefore 3 < 2a+6$$

$$a > -\frac{3}{2} \quad \text{... (A)}$$

② のとき $x < 3$ のとき



$$\frac{6-2a}{3} < 3 \text{ であるはず}$$

< or ≤ を精査しよう

$$\left\{ \frac{6-2a}{3} < 3 \right.$$

の精査

$$\left. \frac{6-2a}{3} \leq 3 \right\}$$

$$\frac{6-2a}{3} = 3 \text{ が条件が満たされた$$

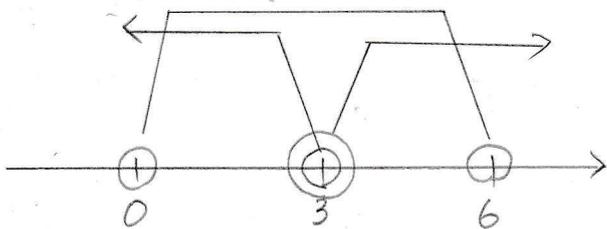
場合

どうか

$$x > \frac{6-2a}{3} = 3$$

⇓

$$x > 3$$



二の範囲を満たすxの値は存在しない

∴ 不適

$$\frac{6-2a}{3} < 3$$

$$6-2a < 9$$

$$a > -\frac{3}{2} \dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} a > -\frac{3}{2} \quad \textcircled{B} a > -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \underline{\underline{a > -\frac{3}{2}}}$$

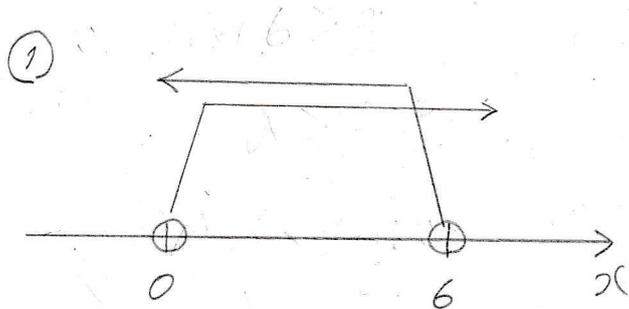
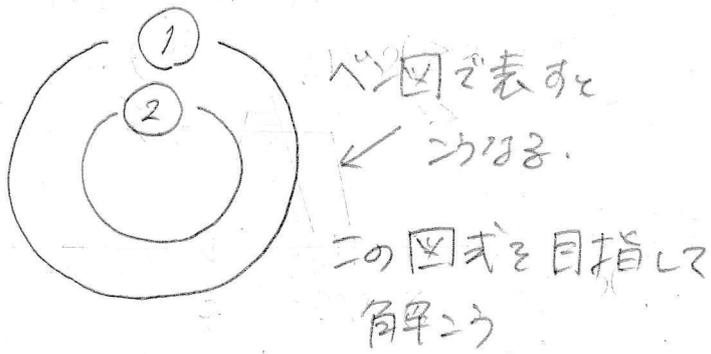
$$[\text{答}] a > -\frac{3}{2}$$

(3) ② を満たす実数 x が存在し、かつ

② を満たす実数 x のすべてが ① を満たすような a の値の範囲を求めよ。

< 解説・解答 >

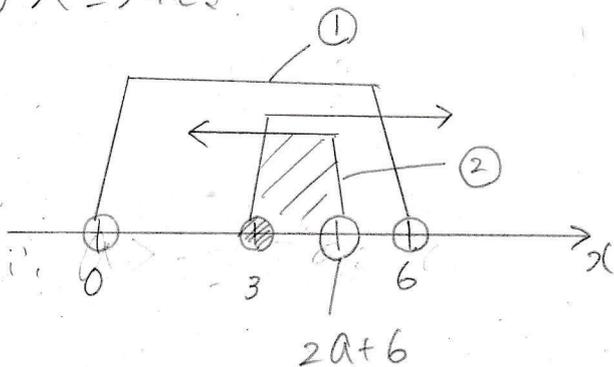
② を満たす実数 x のすべてが ① を満たす、ためには...



②

(A)	$x \geq 3a$ かつ	$x < 2a+6$
(B)	$x < 3a$ かつ	$x > \frac{6-2a}{3}$

(A) $x \geq 3a$ かつ



$3 < 2a+6 < 6$

であらう。

これは、不等号の精査 ($<$ or \leq) をしよう

$\begin{cases} 3 < 2a+6 \\ 3 \leq 2a+6 \end{cases}$ の精査

これは (2) が済んでいる

$3 < 2a+6$

次に

$\begin{cases} 2a+6 < 6 \\ 2a+6 \leq 6 \end{cases}$ の精査

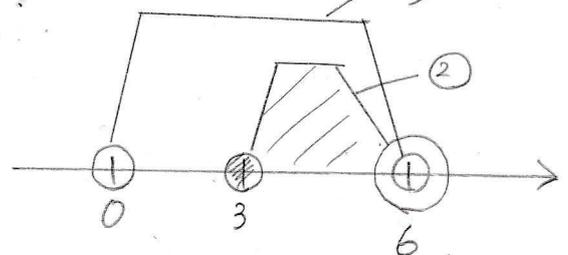
$2a+6=6$ が条件を満たすか

$x < 2a+6$

||
6

$x < 6$

この条件を満たすか



これは $\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ を満たす

$\therefore 2a+6=0$ は適
可

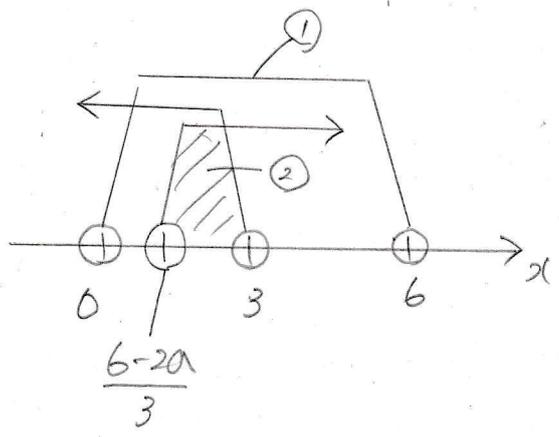
$2a+6 \leq 6$

$$\therefore 3 < 2a + 6 \leq 6$$

$$-3 < 2a \leq 0$$

$$-\frac{3}{2} < a \leq 0 \dots \textcircled{A}$$

$$\textcircled{B} \quad x < 3 \text{ かつ } x > \frac{6-2a}{3}$$



$$0 < \frac{6-2a}{3} < 3$$

不等式の精査

$$\left. \begin{aligned} \frac{6-2a}{3} < 3 \\ \frac{6-2a}{3} \leq 3 \end{aligned} \right\} \text{二つは(1)で済んじや}$$

$$\frac{6-2a}{3} < 3$$

次に $0 < \frac{6-2a}{3}$ の精査

$<$ or \leq

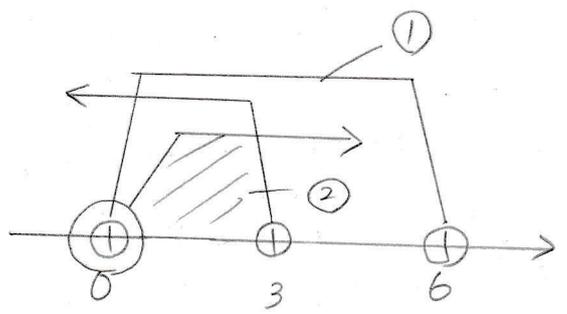
$$\left\{ \begin{aligned} 0 < \frac{6-2a}{3} \\ 0 \leq \frac{6-2a}{3} \end{aligned} \right.$$

$\frac{6-2a}{3} = 0$ が条件を満たすかどうか

$$x > \frac{6-2a}{3} = 0$$

⇓

$x > 0$ は条件を満たす



二つは (1) (2) を満たす

$$0 = \frac{6-2a}{3} \text{ は満たす}$$

$$\therefore 0 \leq \frac{6-2a}{3}$$

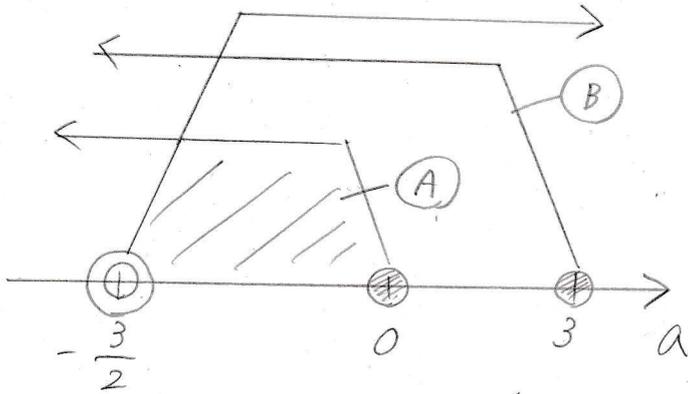
$$0 \leq \frac{6-2a}{3} < 3$$

$$-\frac{3}{2} < a \leq 3 \dots \textcircled{B}$$

(A) (B) 24

$$(A) -\frac{3}{2} < a \leq 0$$

$$(B) -\frac{3}{2} < a \leq 3$$



$$[\frac{4}{6}] -\frac{3}{2} < a \leq 0$$