[1] 赤4枚, 青3枚 計7枚のカードがある。赤のカードには 1, 2, 3, 4, 青のカードには 1, 2, 3 の数字が 1枚ずつ書かれている。これらのカードをよく混ぜて横一列に並べる。

(1) 同じ数字が全て隣り合っている確率を求めよ。

〈解説・解答〉

① ② ③ ④ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

赤 4枚　　青 3枚

①$\boxed{1}$ ②$\boxed{2}$ ③$\boxed{3}$ ④

1つのカタマリとして考える!

⇓

"4枚" のカードの並べかえとして計算しよう

$4! = 24$ 通り

また ①$\boxed{1}$ 同数字の並べかえを計算する必要があるから…

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

1の並べかえ　2の並べかえ　3の並べかえ

∴ $24 \times 8 = 192$

おっと! 場合の数ではなく, 確率であったね!

192 は分子. では, 分母を計算すると…

$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$= 5040$

$$\frac{\cancel{192}^{\cancel{8}\ 4}}{\cancel{5040}_{\cancel{210}\ 105}}$$

$$= \frac{4}{105}$$

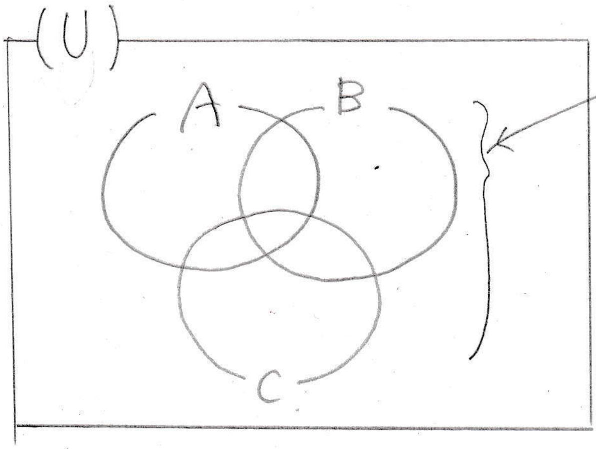
[答] $\dfrac{4}{105}$

(2) 同じ数字は全て隣り合っていない確率を求めよ。

＜解説・解答＞

これはちょっとやっかいだ…

余事象と、"集合"の考え方、計算法を用いると、簡単に求めることができる！



となりあってるものが少なくとも1つある組合せ

$n(A)$ = "1"が隣り合っている組合せ

$n(B)$ = "2"が隣り合っている組合せ

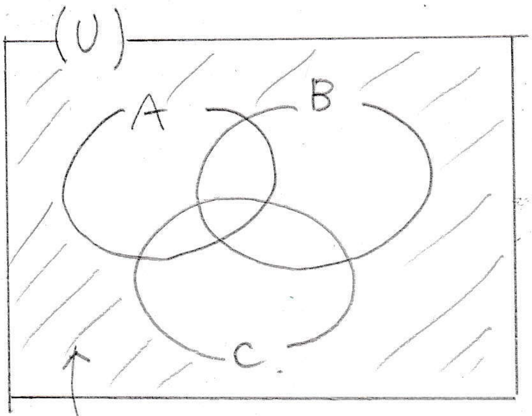
$n(C)$ = "3"が隣り合っている組合せ

とすると…

「同じ数字は全て隣り合っていない」のは…

$n(\overline{A \cup B \cup C})$

で表される部分になる！



$n(\overline{A \cup B \cup C})$ ココだ！

$$n(A \cup B \cup C)$$
$$= n(A) + n(B) + n(C)$$
$$- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$$
$$+ n(A \cap B \cap C)$$

これで求められる！

① $n(A)$　$\underbrace{①\boxed{1}\ ○\ ○\ ○\ ○\ ○}_{6枚のカードの並べかえ}$

$= 6! \times 2$　①$\boxed{1}$の入れ替え

$= 720 \times 2$

$= 1440$

② $n(B)$, $n(C)$も条件は同じだから、

③

$n(B) = n(C) = 1440$

④ $n(A \cap B)$

$\underbrace{(①\boxed{1})(②\boxed{2})\ ○\ ○\ ○}_{}$

5枚のカードの並べかえ

$5! \times 2 \times 2$

①$\boxed{1}$の並べかえ

②$\boxed{2}$の並べかえ

$= 120 \times 4$

$= 480$

⑤⑥ $n(B \cap C)$, $n(A \cap C)$

計算方法が同じだから

$n(B \cap C) = n(A \cap C)$

$= 480$

⑦ $n(A \cap B \cap C)$

$\underbrace{(①\boxed{1})(②\boxed{2})(③\boxed{3})\ ○}_{}$

4枚のカードの並べかえ

$4! \times 2 \times 2 \times 2$

①$\boxed{1}$の入れかえ

③$\boxed{3}$の入れかえ

②$\boxed{2}$の入れかえ

$= 24 \times 8$

$= 192$

$n(A \cup B \cup C)$

$= n(A) + n(B) + n(C)$

$- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$

$+ n(A \cap B \cap C)$

$= 1440 + 1440 + 1440$

$- 480 - 480 - 480$

$+ 192$

$= 3072$

$n(\overline{A \cup B \cup C})$

$= n(U) - n(A \cup B \cup C)$

$= 5040 - 3072$

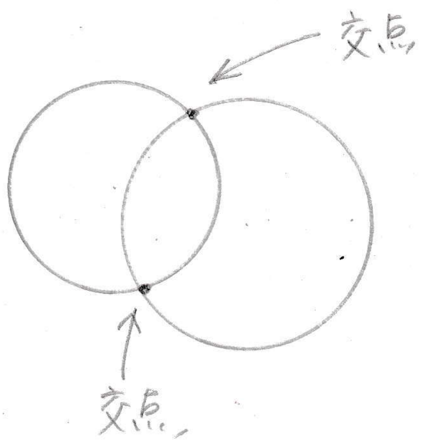
$= 1968$

$\therefore \dfrac{1968}{5040} = \dfrac{41}{105}$

[答] $\dfrac{41}{105}$

[2] 2つの円 $x^2+y^2=4 \cdots C_1$,
$x^2+y^2-2x-4y+4=0 \cdots C_2$
がある。
(1) C_1とC_2の2交点と原点を通る円の方程式を求めよ。

<解説・解答>



2つの円の交点を通る図形の求め方

$$\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ x^2+y^2-2x-4y+4=0 \end{cases}$$

⇓ 実数kを用いて…

$$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-2x-4y+4)=0 \cdots ①$$

という式を立式する。

この図形が原点(0, 0)を通るから、x, yに(0, 0)を代入する。

$$-4+4k=0$$

$$k=1$$

①に代入する。

$$x^2+y^2-4+x^2+y^2-2x-4y+4=0$$

$$2x^2+2y^2-2x-4y=0$$

$$x^2+y^2-x-2y=0$$

[答] $x^2+y^2-x-2y=0$

(2) C_2をx軸方向に4, y軸方向に−2平行移動した円をC_3とする。C_1とC_3の共通接線をすべて求めよ。

＜解説・解答＞

$C_2 \cdots x^2+y^2-2x-4y+4=0$

$x^2-2x+1+y^2-4y+4=1$

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

C_2は 中心$(1, 2)$ 半径1の円

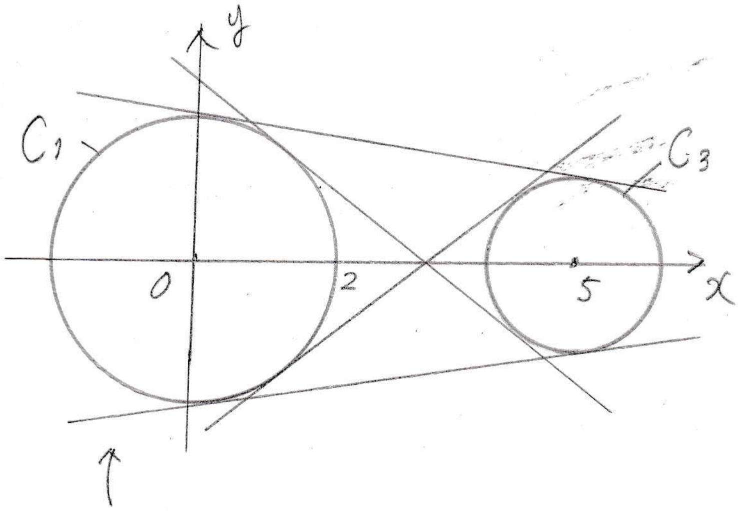
これを x軸方向に4, y軸方向に−2

平行移動する

逆符号を加える!

$(x-1-4)^2+(y-2+2)^2=1$

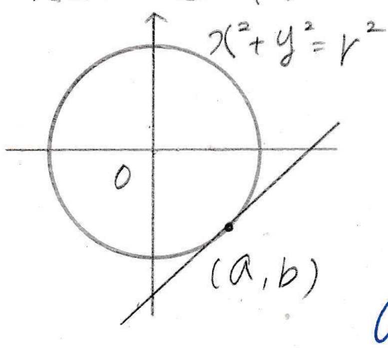
$(x-5)^2+y^2=1$



4本引くことができそうだ。

C_1の接線として立式する。

原点を通る円の接線



$x^2+y^2=r^2$の(a, b)における接線

$ax+by=r^2$

接点を(a, b)とする。

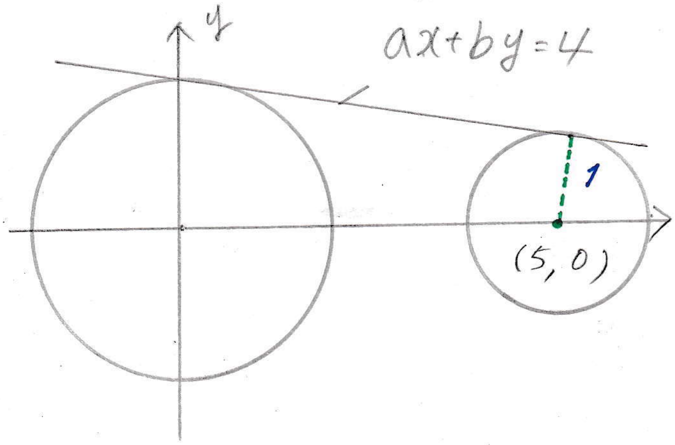
C_1; $x^2+y^2=4$ より

$ax+by=4 \cdots ①$

また, (a, b)はC_1上にあるから

$a^2+b^2=4 \cdots ②$

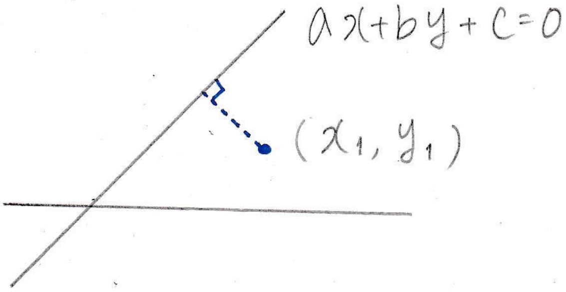
① は C_3 の接線でもある。



$\begin{cases} \cdot\ ax+by=4 \\ \cdot\ (5,0) \end{cases}$ ← 距離が 1

「点と直線の距離」公式を使おう

点と直線の距離



直線 $ax+by+c=0$ と点 (x_1, y_1) の距離

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$ax+by-4=0$. $(5,0)$

$$\frac{|5a-4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$$

② $a^2+b^2=4$ を代入

$$\frac{|5a-4|}{2}=1$$

$|5a-4|=2$

$5a-4=\pm 2$

$5a=6$, $5a=2$.

$a=\frac{6}{5}, \frac{2}{5}$

① $a=\frac{6}{5}$ のとき

$a^2+b^2=4$ に代入し、

$\frac{36}{25}+b^2=4$

$b^2=\frac{64}{25}$

$b=\pm\frac{8}{5}$

$ax+by-4=0$ に代入

$$\frac{6}{5}x \pm \frac{8}{5}y-4=0$$

② $a=\frac{2}{5}$ のとき

$$a^2+b^2=4$$

$$\frac{4}{25}+b^2=4$$

$$b^2=\frac{96}{25}$$

$$b=\pm\frac{4\sqrt{6}}{5}$$

$$ax+by-4=0$$

$$\frac{2}{5}x \pm \frac{4\sqrt{6}}{5}y-4=0$$

[答] $\frac{6}{5}x \pm \frac{8}{5}y-4=0$

$$\frac{2}{5}x \pm \frac{4\sqrt{6}}{5}y-4=0$$