(1) $(a+b+c+1)(a+1)+bc$ を因数分解すると $\boxed{(ア)}$ である。

＜解説・解答＞

項が多い整式（4項以上）の因数分解の鉄則！

各文字の最高次数に着目せよ！

Ⓐ 全て同じ場合 ⇒ いずれかの文字を選んで降べきの順に並べる

Ⓑ 異なる文字がある場合 ⇒ 次数の最も低い文字でまとめる。

$$(与式) = a^2 + a + ab + b + ca + c + a + 1 + bc.$$

a が 2 次，b が 1 次，c が 1 次

⇓

Ⓑのパターンだ！ b or c でまとめよう

$$= b(a+1+c) + a^2 + 2a + ca + c + 1$$

再度，低い文字で！ ⇒ c でまとめる

$$= b(a+c+1) + c(a+1) + a^2 + 2a + 1$$ 因数分解！

$$= b(a+c+1) + c(a+1) + (a+1)^2$$

$(a+1)$ でくくる

$$= b(a+c+1) + (a+1)(a+1+c)$$

$(a+c+1)$ でくくる！

$$= (a+c+1)(a+1+b)$$

$$= (a+b+1)(a+c+1)$$

［答］$(a+b+1)(a+c+1)$ …(ア)

(2) $a+\dfrac{1}{a}=\sqrt{5}$ のとき、$a^3+\dfrac{1}{a^3}=\boxed{(イ)}$、

$a^5+\dfrac{1}{a^5}=\boxed{(ウ)}$ である

＜解説・解答＞

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$$

$$=a^3+3a+\frac{3}{a}+\frac{1}{a^3}$$ より

$$a^3+\frac{1}{a^3}$$

$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$=\sqrt{5}^3-3\times\sqrt{5}$$

$$=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}$$

$$=2\sqrt{5}\cdots(イ)$$

$$\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$$

$$=a^5+\frac{1}{a}+a+\frac{1}{a^5}$$ より

$$a^5+\frac{1}{a^5}$$

$$=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$$

$$=\sqrt{5}^2-2$$

$$=3$$

$$a^5+\frac{1}{a^5}$$

$$=3\times2\sqrt{5}-\sqrt{5}$$

$$=5\sqrt{5}\cdots(ウ)$$

[答] $2\sqrt{5}\cdots(イ)$

$5\sqrt{5}\cdots(ウ)$

(3) 2, 8, 1, 9, 4, a の6個のデータがある。このデータの平均値が7であるときの a の値は $\boxed{(エ)}$ である。また平均値と中央値が等しくなるときの a の値をすべて求めると $\boxed{(オ)}$ である。

<解説・解答>

まず(エ)から求めよう。

$(2+8+1+9+4+a)\div 6$

$=7$ より

$(24+a)\div 6=7$

$a=18$ …(エ)

次に(オ)を求めよう。

1, 2, 4, 8, 9, a

中央値になりうるのは…

Ⓐ $a\leqq 2$ のとき $\dfrac{2+4}{2}=3$

中央値

Ⓑ $2<a<8$ のとき $\dfrac{4+a}{2}$

Ⓒ $a\geqq 8$ のとき $\dfrac{4+8}{2}=6$

また、平均値は $\dfrac{24+a}{6}$

Ⓐ $a\leqq 2$ のとき

$3=\dfrac{24+a}{6}$

$a=-6$ …(オ)$_1$

Ⓑ $2<a<8$ のとき

$\dfrac{4+a}{2}=\dfrac{24+a}{6}$

$12+3a=24+a$

$a=6$ …(オ)$_2$

Ⓒ $a\geqq 8$ のとき

$6=\dfrac{24+a}{6}$

$a=12$ …(オ)$_3$

[答] $a=18$ …(エ)、$a=-6, 6, 12$ …(オ)

(4) 3進法で表すと5桁になる正の整数は、全部で $\boxed{(カ)}$ である。

＜解説・解答＞

求める正の整数を N とする

$N_{(3)}$ が5桁だから…

$$10000_{(3)} \leqq N_{(3)} < 100000_{(3)}$$

$$10000_{(3)}$$

3^4 の位　3^3 の位　3^2 の位　3^1 の位　3^0 の位

$$= 3^4 \times 1 + 3^3 \times 0 + 3^2 \times 0 + 3^1 \times 0 + 3^0 \times 0$$

$$= \underline{81}$$

$$100000_{(3)}$$

3^5・3^4　3^3　3^2　3^1　3^0 の位

$$= 3^5 \times 1 + 3^4 \times 0 + 3^3 \times 0 + 3^2 \times 0 + 3^1 \times 0 + 3^0$$

$$= \underline{243}$$

243は含まない!

+1を忘れずに!

$$242 - 81 + 1 = \underline{\underline{162個}}$$

[答] 162個…(カ)

(5) a が正の整数であるとき、

$\dfrac{4a^2+9}{2a}$ の最小値を求めると

$\boxed{(キ)}$ である。

＜解説・解答＞

(相加平均)≧(相乗平均)を用いる

(相加平均)≧(相乗平均)

$a>0$, $b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

等号成立は $a=b$ のとき

a は正の整数 $(a>0)$ より

$$\frac{4a^2+9}{2a} = 2a + \frac{9}{2a}$$

(相加平均)≧(相乗平均)より

$$2a + \frac{9}{2a} \geqq 2\sqrt{\cancel{2a} \cdot \frac{9}{\cancel{2a}}}$$

$$\geqq 6$$

∴ $\underline{\underline{最小値は6}}$

[答] 6…(キ)

(6) 2次方程式 $x^2+2kx+k+12=0$ が実数解を持ち、実数解がすべて1より大きいように定数 k の値の範囲を求めると $\boxed{(7)}$ である。

<解説・解答>

2つの実数解を α, β とする

ともに1より大きいから、

$\alpha > 1$, $\beta > 1$ より

$\alpha - 1 > 0$, $\beta - 1 > 0$

$$\begin{cases} ① \ (\alpha-1)(\beta-1) > 0 \\ ② \ \alpha - 1 + \beta - 1 > 0 \end{cases}$$

① $\alpha\beta - \alpha - \beta + 1 > 0$

$\alpha\beta - (\alpha+\beta) + 1 > 0$

② $\alpha + \beta - 2 > 0$

また、2次方程式に「解と係数の関係」を適用して、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2k & Ⓐ \\ \alpha\beta = k + 12 & Ⓑ \end{cases}$$

①、②にⒶ、Ⓑを代入して、

① $k + 12 + 2k + 1 > 0$

$3k > -13$

$k > -\frac{13}{3}$ …あ

② $-2k - 2 > 0$

$2k < -2$

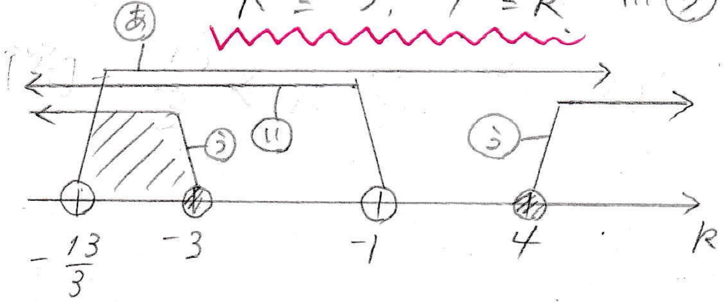
$k < -1$ …い

また 判別式 $\geqq 0$ ← "実数解を持つ" だから…

$\frac{D}{4} = k^2 - k - 12 \geqq 0$

$(k-4)(k+3) \geqq 0$

$k \leqq -3$, $4 \leqq k$ …う



[答] $-\frac{13}{3} < k \leqq -3$ …(7)