[1] 2次不等式 $ax^2-3ax+2>0$ $(a \neq 0)$ について次の問いに答えよ。

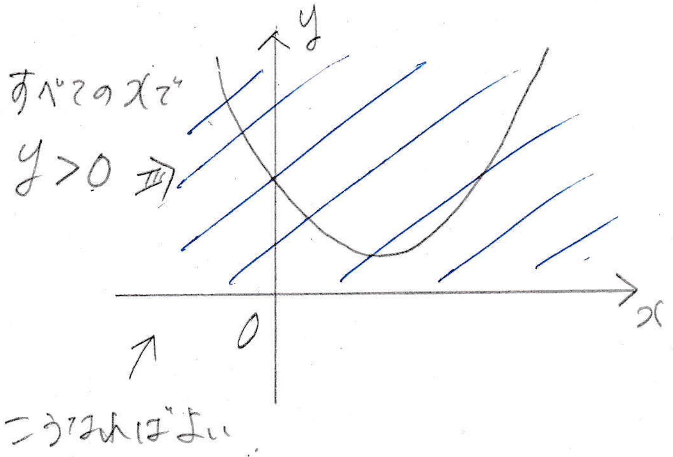
(1) すべての実数xに対して、この不等式が成り立つようなaの値の範囲を求めよ。

<解説・解答>

$ax^2-3ax+2>0$ の左辺を

$y=ax^2-3ax+2$ と2次関数で考えよう。

すべての実数xで $y>0$ が成り立つには…



この条件を立式しよう

①
$a>0$

② $y=ax^2-3ax+2$ と $y=0$ と 交点を持たない
x軸

② $y=ax^2-3ax+2$
$y=0$

⇓

yを消去して、

$ax^2-3ax+2=0$

この2次方程式が「解を持たない」ようにすればよい。

$$D=(3a)^2-4a \cdot 2<0$$

$$9a^2-8a<0$$

$$a(9a-8)<0$$

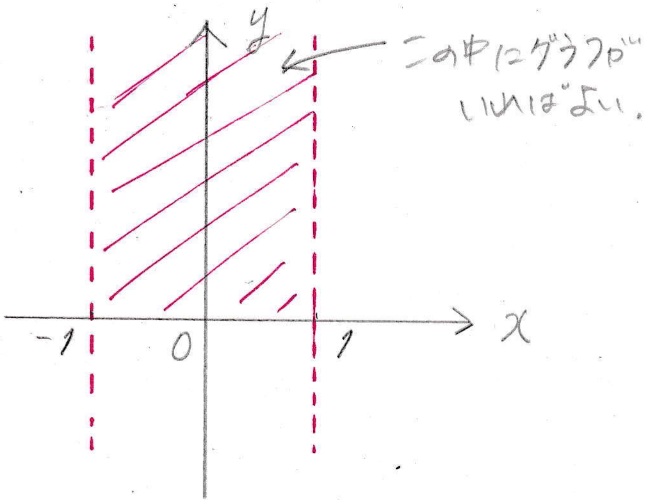
$$0<a<\frac{8}{9}$$

① $a>0$ を満たす

[答] $0<a<\frac{8}{9}$

(2) $-1<x<1$ を満たすすべての実数 x に対して、この不等式が成り立つような実数 a の値の範囲を求めよ。

〈解説・解答〉



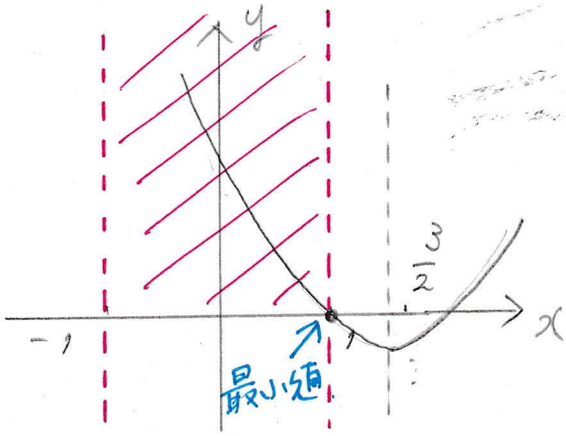
① $a>0$ のときと ② $a<0$ に分けて考えよう。 ※ $a \neq 0$ である

まずグラフの形を確認しよう。

$$y=ax^2-3ax+2$$
$$=a(x^2-3x)+2$$
$$=a\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+2$$
$$=a\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}a+2$$

∴ 軸は $x=\frac{3}{2}$ であることがわかった。

① $a>0$ のとき



この条件を立式するには…

$-1<x<1$ における

最小値 $\geqq 0$

となればよい。

$\geqq$ であることに注意！

なぜなら…
$-1<x<1$ の範囲で
$ax^2-3ax+2>0$ が
成り立てばよいから…
最小値 $=0$ のときも、
条件が成り立つからである！

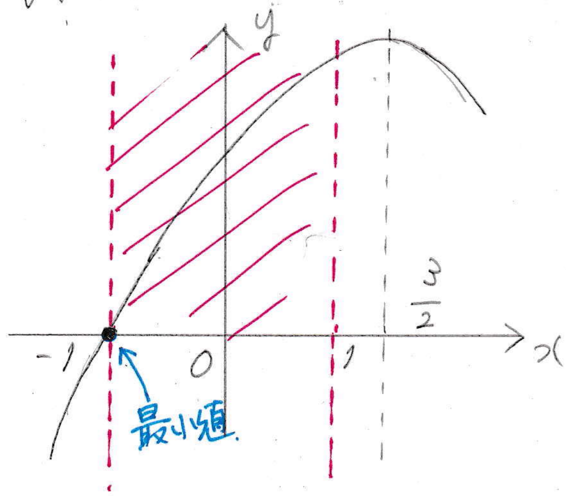
最小値は $x=1$ のとき

$$f(1)=a-3a+2 \geqq 0$$
$$-2a \geqq -2$$
$$a \leqq 1$$

$a>0$ のときだから…

∴ $0<a\leqq 1$ … ①

② $a<0$ のとき



同様に 最小値 $\geqq 0$ を立式する

最小値は $x=-1$ のとき

$$f(-1)=a+3a+2 \geqq 0$$

$$4a \geqq -2$$

$$a \geqq -\frac{1}{2}$$

$a<0$ のときだから

$-\frac{1}{2} \leqq a < 0$ …②

①, ②より

$-\frac{1}{2} \leqq a < 0,\ 0 < a \leqq 1$

[答] $-\frac{1}{2} \leqq a < 0,\ 0 < a \leqq 1$

[2] x, yを実数とする。領域Aが不等式 $|x-y| \leqq 1$, $|x+y-3| \leqq 2$ で表されるとき、次の問いに答えよ。

(1) 領域Aの面積を求めよ。

<解説・解答>

$|x-y| \leqq 1$

⇓

$-1 \leqq x-y \leqq 1$

$$\begin{cases} -1 \leqq x-y \\ x-y \leqq 1 \end{cases}$$

$y \leqq x+1$ …①

$y \geqq x-1$ …②

$|x+y-3| \leqq 2$

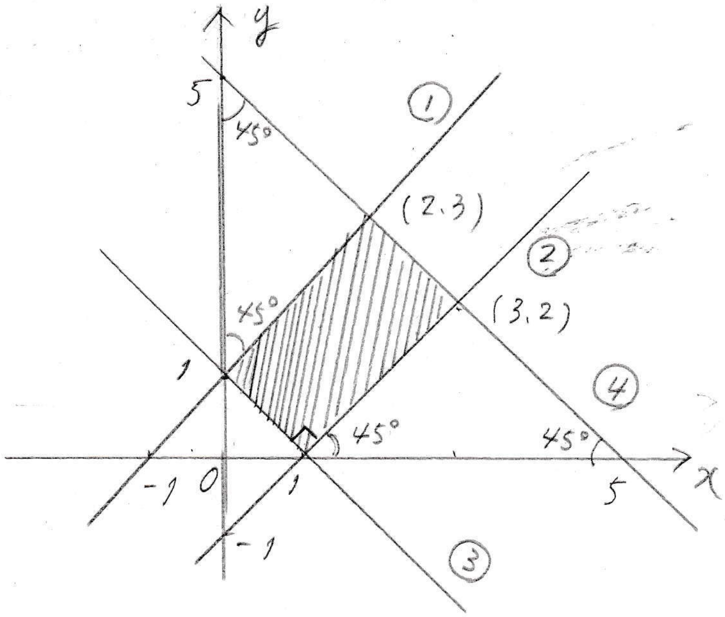
⇓

$-2 \leqq x+y-3 \leqq 2$

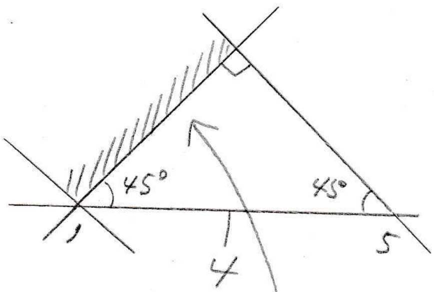
$$\begin{cases} -2 \leqq x+y-3 \\ x+y-3 \leqq 2 \end{cases}$$

$y \geqq -x+1$ …③

$y \leqq -x+5$ …④



領域Aは長方形



$1 : \sqrt{2} = x : 4$

$\sqrt{2}x = 4$

$x = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

領域A

$= \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$

$= 4$

[答] 4

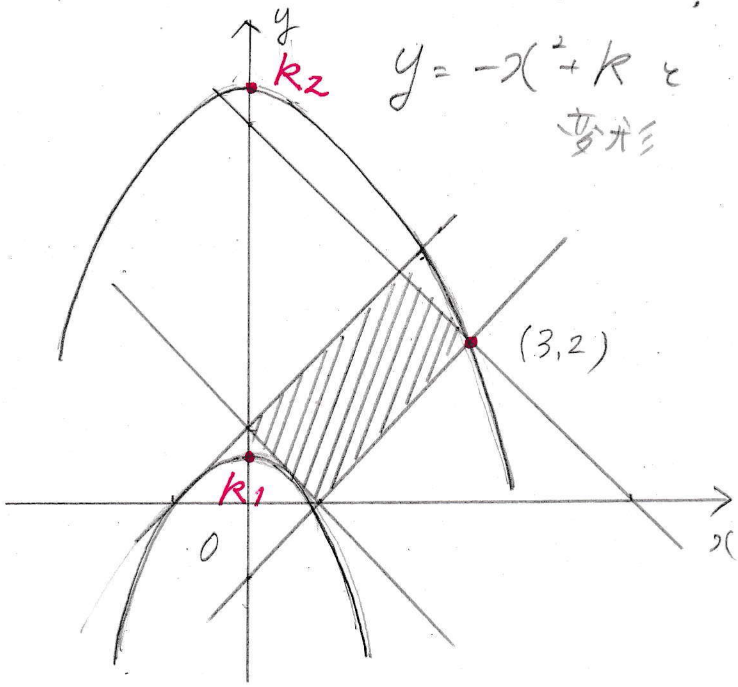
(2) 点 x, y が この領域を動くとき、$y+x^2$ の最小値、最大値を求めよ。

<解説・解答>

$y+x^2=k$ と表す。

(x, y) が領域内を動くとき

k の最小値、最大値を求める。



① k_1 が k の最小値

② k_2 が k の最大値

① $y=-x^2+k$

$y=-x+1$

と1点で交わるとき

$-x^2+k=-x+1$

$x^2-x-k+1=0$

1点で交わる = 解が1つ

$D=1-4(-k+1)=0$

$4k=3$

$k=\dfrac{3}{4}$ ← 最小値

② $y=-x^2+k$

点 $(3, 2)$ を通るとき

$2=-9+k$

$k=11$ ← 最大値

[答] 最小値 $\dfrac{3}{4}$

最大値 11