[1] 赤玉5個，白玉4個，青玉3個が入った袋がある。

(1) 同時に4個取り出すとき，3色の玉がすべて含まれる確率を求めよ。

<解説・解答>

3色の玉がすべて含まれるのは以下の3通り

Ⓐ 赤玉2個，白玉1個，青玉1個

Ⓑ 白玉2個，赤玉1個，青玉1個

Ⓒ 青玉2個，赤玉1個，白玉1個

※全ての玉の個数がちがうことから計算方法が異なる。よって別々に計算する必要がある。

Ⓐ 赤2，白1，青1

$$ {}_5C_2 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 $$
$$ = 10 \times 4 \times 3 $$
$$ = 120 $$

Ⓑ 白2，赤1，青1

$$ {}_4C_2 \times {}_5C_1 \times {}_3C_1 $$
$$ = 6 \times 5 \times 3 $$
$$ = 90 $$

Ⓒ 青2，赤1，白1

$$ {}_3C_2 \times {}_5C_1 \times {}_4C_1 $$
$$ = 3 \times 5 \times 4 $$
$$ = 60 $$

3つの事象は互いに排反だから"和"

Ⓐ + Ⓑ + Ⓒ

$$ = 120 + 90 + 60 $$
$$ = 270 $$ ← 分子

分母は

$$ {}_{12}C_4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} $$
$$ = 495 $$

$$ \frac{270}{495} $$
$$ = \frac{6}{11} $$

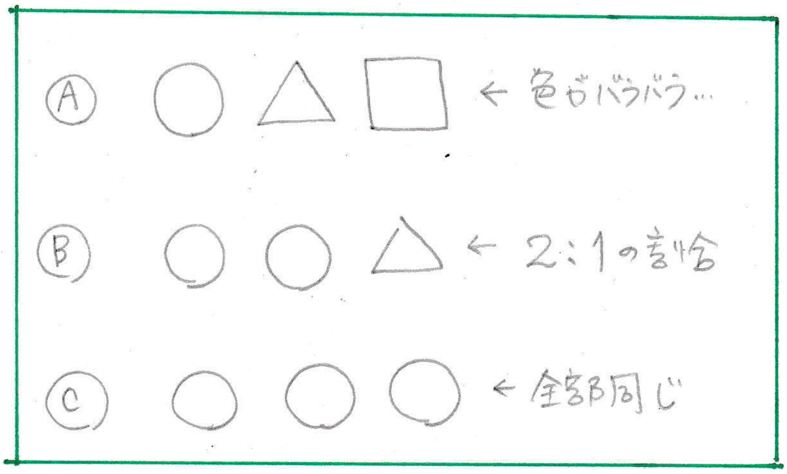
[答] $\frac{6}{11}$

(2) 同時に3個を取り出すとき、少なくとも2色の玉が含まれている確率を求めよ。

＜解説・解答＞

「少なくとも2色の玉が含まれる」について考えよう。

「同時に3個取り出す」のは、次の3パターンがある。



「少なくとも2色…」は Ⓐ+Ⓑ

ただし"余事象"の解法の方がラクだね！

1 − Ⓒ

で求めよう。

Ⓒを求めよう。

C-1 赤1色

$_5C_3 = 10$

C-2 白1色

$_4C_3 = 4$

C-3 青1色

$_3C_3 = 1$

$10 + 4 + 1 = 15$通り

分母は

$_{12}C_3 = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1}$

$= 220$

$\rightarrow \dfrac{15}{220}$

$= \dfrac{3}{44}$

$1 - \dfrac{3}{44}$

$= \dfrac{41}{44}$

[答] $\dfrac{41}{44}$

[2] θの関数 $f(\theta) = \sin\theta + \cos\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta \ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ がある。

(1) $t = \sin\theta + \cos\theta$ とおくとき $f(\theta)$ を t で表せ。また t のとりうる値の範囲を求めよ。

＜解説・解答＞

$$f(\theta) = \underbrace{\sin\theta + \cos\theta}_{= t} + \underbrace{2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta}_{= \text{変形}}$$

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2$$

$$= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta + 1$$

$$t^2 = 2\sin\theta\cos\theta + 1$$

$$2\sin\theta\cos\theta = t^2 - 1 \Rightarrow \text{代入}$$

tに変える!

$$f(t) = t + \sqrt{2}(t^2 - 1)$$

$$= \sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2}$$

tのとりうる値の範囲を求めよう

$$t = \sin\theta + \cos\theta$$

合成しよう

$$= \sqrt{1^2 + 1^2}\sin(\theta + \alpha)$$

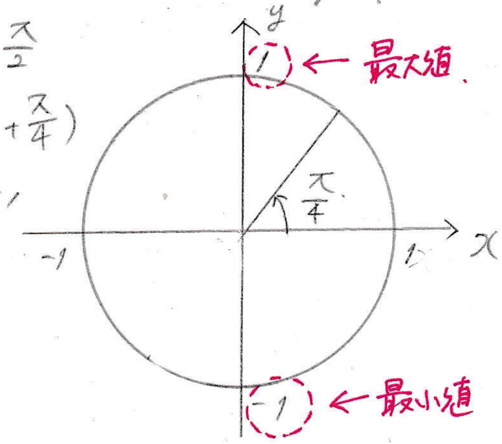
α は $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

α を満たす $\therefore \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

$$t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$

$\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ のMAX, min



$$-1 \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$$

$$-\sqrt{2} \leqq \underbrace{\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}_{= t} \leqq \sqrt{2}$$

[答] $f(t) = \sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2}$

$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

(2) $f(\theta)=0$ を満たす θ をすべて求めよ。

＜解説・解答＞

$f(t)=\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}$ を利用しよう

$$\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=0$$

解の公式

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{-1\pm 3}{2\sqrt{2}}$$

$$t=\frac{2}{2\sqrt{2}},\ \frac{-4}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\sqrt{2}$$

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ をともに満たす

この記述がないと減点！

θ を解こう

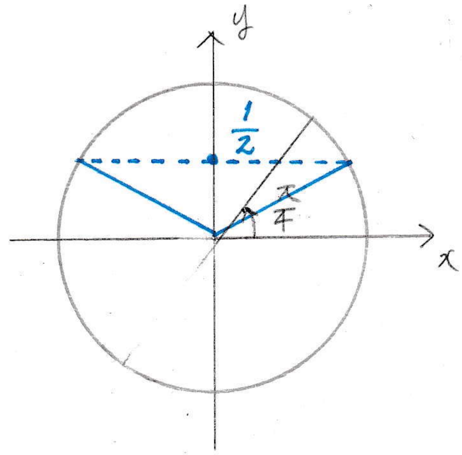
$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ より

① $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より $\Rightarrow \frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$



$$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$$

$$\theta=\frac{7}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$$

② $t=-\sqrt{2}$ のとき

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

$$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$$

$$\theta=\frac{5}{4}\pi$$

[答] $\frac{7}{12}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$