[問題] $0 \leqq \theta \leqq \pi$ とし、2次方程式
$x^2-2(\sin\theta+\cos\theta)x+\sqrt{3}\cos 2\theta=0$ を考える。

(1) 判別式を $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ を用いて表せ。

<解説・解答>

$$x^2-2(\sin\theta+\cos\theta)x+\sqrt{3}\cos 2\theta=0$$

判別式 $\frac{D}{4}$ を求めよう。

$$\frac{D}{4}=(\sin\theta+\cos\theta)^2-\sqrt{3}\cos 2\theta$$

$$=\underbrace{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}_{1}$$

$$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

$$-\sqrt{3}\cos 2\theta$$

$$=\sin 2\theta-\sqrt{3}\cos 2\theta+1$$

[答] $\sin 2\theta-\sqrt{3}\cos 2\theta+1$

(2) 実数解をもつような θ の範囲を求めよ。

<解説・解答>

実数解をもつから、

判別式 $\geqq 0$

を示せばよい。

実数解
個数を問うていない
から $\geqq$

(1)より

$$\sin 2\theta-\sqrt{3}\cos 2\theta+1\geqq 0$$

"合成"をしよう

$$\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}\sin(2\theta+\alpha)+1\geqq 0$$

$$2\sin(2\theta+\alpha)+1\geqq 0$$

α は

$\sin\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$

をともに満たす α …つまり $\alpha=-\frac{\pi}{3}$

$$2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+1\geqq 0$$

この不等式を解こう

$$\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right) \geqq -\frac{1}{2}$$

↓

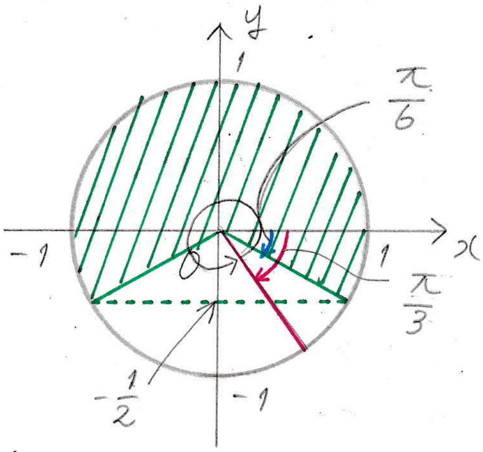
この不等式を解くには、

$2\theta-\frac{\pi}{3}$ の範囲が必要。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$$

$$-\frac{\pi}{3} \leqq 2\theta-\frac{\pi}{3} \leqq \frac{5}{3}\pi$$



$$\therefore -\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta-\frac{\pi}{3} \leqq \frac{7}{6}\pi$$

$$\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta \leqq \frac{3}{2}\pi$$

$$\frac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi$$

[答] $\frac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi$

(3) 解がすべて正であるような θ の範囲を求めよ。

<解説・解答>

"解がすべて正" を立式しよう。

① $D \geqq 0$

2つの解を α, β とすると、

$\alpha > 0$, $\beta > 0$ より

② $\alpha+\beta > 0$

③ $\alpha\beta > 0$

① $D \geqq 0$

(2)より

$$\frac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi \quad \cdots ①$$

② $\alpha+\beta > 0$

③ $\alpha\beta > 0$

2次方程式

$$x^2-2(\sin\theta+\cos\theta)x+\sqrt{3}\cos 2\theta=0$$

に「解と係数の関係」を

適用して…

② $\alpha+\beta>0$ 　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

$$2(\sin\theta+\cos\theta)>0$$

⇓ 合成しよう！

$$2\sqrt{2}\sin(\theta+\gamma)>0$$

γは $\sin\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

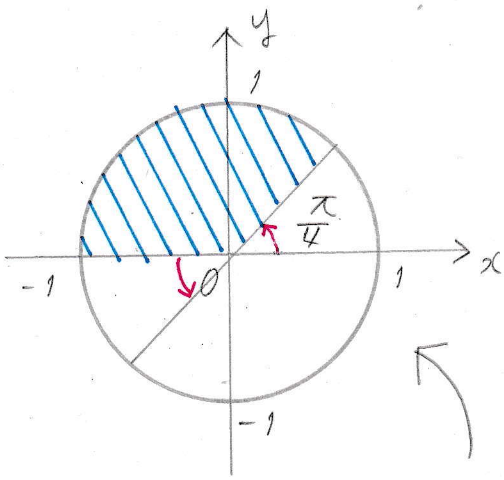
をともにみたすγ、つまり $\gamma=\dfrac{\pi}{4}$

$$2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)>0$$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)>0$$

↓

範囲を設定しよう



$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$

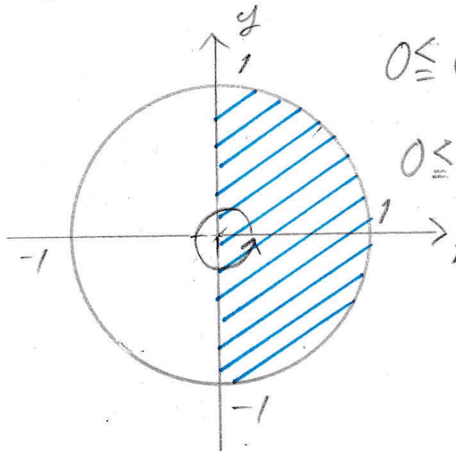
$$\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\pi$$

$$0<\theta<\frac{3}{4}\pi \quad \cdots②$$

③ $\alpha\beta>0$ 　$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$$\sqrt{3}\cos 2\theta>0$$

$$\cos 2\theta>0$$



$0\leqq\theta\leqq\pi$ より

$0\leqq 2\theta\leqq 2\pi$

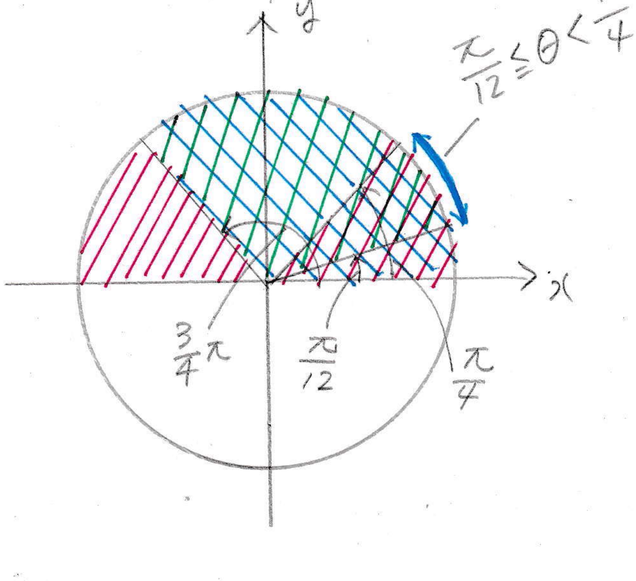
$$0\leqq 2\theta<\frac{\pi}{2},\quad \frac{3}{2}\pi<2\theta\leqq 2\pi$$

⇓

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{4},\quad \frac{3}{4}\pi<\theta\leqq\pi$$

$\cdots③$

①, ②, ③ より



[答] $\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$

(4) 正の重解をもつような θ と、そのときの重解を求めよ。

＜解説・解答＞

"正の重解をもつ"を立式しよう.

(3)の範囲

$\left(\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$

かつ

$D=0$. をさせばよい.

$$D = 2\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$$

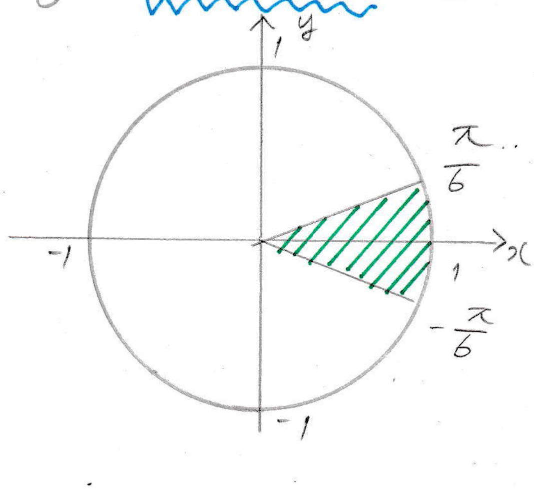
$$\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より

$$\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6}$$



$$\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$2\theta-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$$

$$2\theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\theta=\frac{\pi}{12}\ \cdots(答)$$

重解の求め方 超重要!

$$x^2-2(\sin\theta+\cos\theta)x+\sqrt{3}\cos 2\theta=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

重解は、$b^2-4ac=0$ となるから

$x=-\dfrac{b}{2a}$ を求めればよい

$$=\frac{2(\sin\theta+\cos\theta)}{2}$$

$$=\sin\theta+\cos\theta$$

$\theta=\dfrac{\pi}{12}$ を代入しても値は求められない…

$$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\ \cdots(答)$$

[答] $\theta=\dfrac{\pi}{12}$

重解 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$